

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Έστω το άθροισμα: $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, τότε το συμβολίζουμε με:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

όπου το σύμβολο $\sum_{i=1}^n x_i$ παριστάνει μια συντομογραφία του αθροίσματος $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ και διαβάζεται “άθροισμα των x_i από $i=1$ έως n ”. Συχνά, όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης, συμβολίζεται και ως $\sum x_i$ ή ακόμα πιο απλά με $\sum x$.

Ιδιότητα: η μεταβλητή που εμφανίζεται στο άθροισμα δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα και μπορεί στη θέση της να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε άλλη, δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{r=1}^n x_r = \sum_{j=1}^n x_j = \dots$$

Χρειάζεται να ξέρουμε το “σημείο” έναρξης ($i=1$) και τερματισμού ($i=n$) και να μπορούμε με κάποιο τρόπο να προσδιορίσουμε τους όρους $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ιδιότητα:

$$x_k + x_{k+1} + \dots + x_n = \sum_{i=k}^n x_i = \sum_{j=0}^{n-k} x_{k+j} = x_k + x_{k+1} + \dots + x_n$$

Αλλαγή μεταβλητής

Πιο συγκεκριμένα: $S = \sum_{i=1}^n x_i$, θέτουμε $j=i-k \Rightarrow i=j+k$ και άρα ο όρος x_i αντικαθίσταται από τον x_{j+k} .

Τα όρια $i=k \Rightarrow j=k-k=0$, ενώ αν $i=n \Rightarrow j=n-k$ επομένως:

$$S = \sum_{i=k}^n x_i = \sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$
2. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$
3. $\sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$
4. $\sum_{i=1}^n (ia_i + b_i) = (1a_1 + b_1) + (2a_2 + b_2) + \dots + (na_n + b_n)$
5. $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \beta_i = \alpha_1^2 \beta_1 + \alpha_2^2 \beta_2 + \alpha_3^2 \beta_3 + \dots + \alpha_n^2 \beta_n$
6. $\sum_{i=k}^l (a_i + \frac{b_i}{i}) = (a_k + \frac{b_k}{k}) + (a_{k+1} + \frac{b_{k+1}}{k+1}) + \dots + (a_l + \frac{b_l}{l})$

Κύριες ιδιότητες

- $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\nu} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_{\nu} + b_{\nu}) = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{\nu} + b_1 + b_2 + \dots + b_{\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} a_i + \sum_{i=1}^{\nu} b_i\end{aligned}\quad (1)$$

- $$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \quad (2)$$

- $$\sum_{i=1}^m (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m y_i \quad (3)$$

- $$\sum_{i=1}^{\nu} a = \nu a \quad (4)$$

Ασκήσεις:

1.
$$\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \sum_{i=1}^{\nu} x_i) = (1 - \nu) \sum_{i=1}^{\nu} x_i$$

2.
$$\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}) = 0$$

3.
$$\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu \bar{x}^2 \text{ (όπου ο } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}, \text{ ο αριθμητικός μέσος).}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ - ΟΡΟΛΟΓΙΑ

1. Πρόσθεση

Αν $\alpha + \beta = \gamma$, τότε η πράξη μεταξύ των α και β καλείται **πρόσθεση**, συμβολίζεται με (+), ο αριθμός γ , που είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης, καλείται **άθροισμα**, ενώ οι αριθμοί α και β , που συμμετέχουν στην πρόσθεση, καλούνται **προσθετέοι**.

Είναι γνωστό ότι $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, επομένως δεν χρειάζεται να διευκρινιστεί η σειρά με την οποία προστίθενται οι αριθμοί αυτοί, οπότε από κοινού τους καλούμε προσθετέους.

2. Αφαίρεση

Αν $\alpha - \beta = \gamma$, τότε η πράξη μεταξύ των α και β καλείται **αφαίρεση**, συμβολίζεται με (-), ο αριθμός γ , που είναι το αποτέλεσμα της αφαίρεσης, καλείται **διαφορά**, ενώ οι αριθμοί α και β , που συμμετέχουν στην αφαίρεση, καλούνται: ο μεν α **μειωτέος**, ο δε β **αφαιρετέος**.

Είναι γνωστό ότι $\alpha - \beta \neq \beta - \alpha$ [συγκεκριμένα $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$], επομένως πρέπει να διευκρινιστεί από ποιόν αριθμό αφαιρείται ποιος αριθμός, οπότε τους διακρίνουμε από την ονομασία τους, δηλαδή μειωτέος και αφαιρετέος.

3. Πολλαπλασιασμός

Αν $\alpha \cdot \beta = \gamma$, τότε η πράξη μεταξύ των α και β καλείται **πολλαπλασιασμός**, συμβολίζεται με ($\bullet$), ο αριθμός γ , που είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού, καλείται **γινόμενο**, ενώ οι αριθμοί α και β , που συμμετέχουν στον πολλαπλασιασμό, καλούνται **παράγοντες**.

Είναι γνωστό ότι $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, επομένως δεν χρειάζεται να διευκρινιστεί η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζονται οι αριθμοί αυτοί, οπότε από κοινού τους καλούμε παράγοντες.

4. Διαίρεση

Αν $\alpha : \beta = \gamma$, τότε η πράξη μεταξύ των α και β καλείται **διαίρεση**, αυτή συμβολίζεται με ($:$ ή $\div$), δηλαδή $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$, ο αριθμός γ , που είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης,

καλείται **πηλίκο ή λόγος**, ενώ οι αριθμοί α και β , που συμμετέχουν στην διαίρεση, καλούνται: ο μεν α **διαιρετέος**, ο δε β **διαιρέτης** (ή **αριθμητής** και **παρανομαστής** αντίστοιχα σε μορφή κλάσματος).

Είναι γνωστό ότι $\alpha : \beta \neq \beta : \alpha$ [συγκεκριμένα $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta = (\beta : \alpha)^{-1} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$],

επομένως πρέπει να διευκρινιστεί ποιός αριθμός διαιρείται από ποιόν αριθμό, οπότε τους διακρίνουμε από την ονομασία τους, δηλαδή διαιρετέος και διαιρέτης (ή αριθμητής και παρανομαστής αντίστοιχα, αν είναι σε μορφή κλάσματος).

5. Δύναμη

Αν $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} = \beta$, τότε λέμε ότι το α το **υψώσαμε σε δύναμη ν** , συμβολίζεται

με (α^{ν}), ο αριθμός β , που είναι το αποτέλεσμα, καλείται **δύναμη**, ενώ οι αριθμοί α και ν , που συμμετέχουν στη δύναμη, καλούνται: ο μεν α **βάση της δύναμης**, ο δε ν **εκθέτης**.

6. Ρίζα (τετραγωνική)

Αν $\sqrt[n]{\beta} = \sqrt{\beta} = \alpha$, τότε η πράξη καλείται **ρίζα**, ο αριθμός α , που είναι το αποτέλεσμα της ρίζας, καλείται **ρίζα του β** , ο αριθμός β καλείται υπόριζη ποσότητα, και ο **2 εκθέτης** της ρίζας.

Είναι γνωστό ότι αν $\sqrt[n]{\beta} = \alpha \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \alpha^2 = \beta$, επομένως για να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του β θα πρέπει να βρούμε έναν τέτοιο αριθμό, το τετράγωνο του οποίου θα μας δίνει το β , παράδειγμα:

$\sqrt{4} = 2$, αφού $2^2 = 4$, $\sqrt{9} = 3$, γιατί $3^2 = 9$, $\sqrt{16} = 4$, γιατί $4^2 = 16$, $\sqrt{25} = 5$, γιατί $5^2 = 25$, κλπ.

Παρατηρήστε ότι η ρίζα ορίζεται μέσω της δύναμης.

Γενικότερα ορίζεται η **n -οστή ρίζα** ως εξής:

$$\sqrt[n]{\beta} = \alpha \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \alpha^n = \beta$$

7. Λογάριθμος

Αν $\log_a \beta = n$, τότε ο αριθμός n καλείται **λογάριθμος του β με βάση το a** . Ο αριθμός a καλείται **βάση** του λογαρίθμου.

Είναι γνωστό ότι αν $\log_a \beta = n \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} a^n = \beta$, επομένως για να βρούμε τον λογάριθμο του β με βάση το a θα πρέπει να βρούμε έναν τέτοιο αριθμό, στον οποίο αν υψώσουμε την βάση a θα μας δώσει το β , παράδειγμα:

$\log_2 4 = 2$, γιατί $2^2 = 4$, $\log_5 25 = 2$, γιατί $5^2 = 25$ και $\log_2 8 = 3$, γιατί $2^3 = 8$, κλπ.

Παρατηρήστε ότι ο λογάριθμος ορίζεται μέσω της δύναμης.

Γενικότερα η σχέση που συνδέει τη δύναμη, τη ρίζα και το λογάριθμο είναι:

$$\sqrt[n]{\beta} = \alpha \overset{\text{ορισμ.}}{\Leftrightarrow} \alpha^n = \beta \overset{\text{ορισμ.}}{\Leftrightarrow} \log_a \beta = n$$

Δηλαδή οι αριθμοί a , β , n συνδέονται με τη σχέση $a^n = \beta$ και

- αν δεν γνωρίζουμε το a , ενώ τα β και n είναι γνωστά, τότε λύνουμε ως προς το a ,

$$\sqrt[n]{\beta} = a$$

- αν δεν γνωρίζουμε το n , ενώ τα a και β γνωστά, τότε λύνουμε ως προς το n ,

$$\log_a \beta = n$$

- αν δεν γνωρίζουμε το β , ενώ τα a και n είναι γνωστά, τότε λύνουμε ως προς το β ,

$$a^n = \beta$$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

$\ln(x)$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0	.3299503	.019803	.029559	.039221	.048790	.058269	.067659	.076961	.086178
1.1	.095310	.104360	.113329	.122218	.131028	.139762	.148420	.157004	.165514	.173953
1.2	.182322	.190620	.198851	.207014	.215111	.223144	.231112	.239017	.246860	.254642
1.3	.262364	.270027	.277632	.285179	.292670	.300105	.307485	.314811	.322083	.329304
1.4	.336472	.343590	.350657	.357674	.364643	.371564	.378436	.385262	.392042	.398776
1.5	.405465	.412110	.418710	.425268	.431782	.438255	.444686	.451076	.457425	.463734
1.6	.470004	.476234	.482426	.488580	.494696	.500775	.506818	.512824	.518794	.524729
1.7	.530628	.536493	.542324	.548121	.553885	.559616	.565314	.570980	.576613	.582216
1.8	.587787	.593327	.598837	.604316	.609766	.615186	.620576	.625938	.631272	.636577
1.9	.641854	.647103	.652325	.657520	.662688	.667829	.672944	.678034	.683097	.688135
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	.693147	.698135	.703098	.708036	.712950	.717840	.722706	.727549	.732368	.737164
2.1	.741937	.746688	.751416	.756122	.760806	.765468	.770108	.774727	.779325	.783902
2.2	.788457	.792993	.797507	.802002	.806476	.810930	.815365	.819780	.824175	.828552
2.3	.832909	.837248	.841567	.845868	.850151	.854415	.858662	.862890	.867100	.871293
2.4	.875469	.879627	.883768	.887891	.891998	.896088	.900161	.904218	.908259	.912283
2.5	.916291	.920283	.924259	.928219	.932164	.936093	.940007	.943906	.947789	.951658

Ο πίνακας προσδιορίζει τον νεπέριο λογάριθμο, δηλαδή $\log_e(x) = \ln(x)$. Π.χ. Αν θέλουμε το $\ln(1,65)$, τότε από τον πίνακα έχουμε ότι το $\ln(1,65)=0,500775$

ΑΡΙΘΜΟΣΥΝΟΛΑ

Τα αριθμοσύνολα είναι σύνολα τα στοιχεία των οποίων είναι αριθμοί.

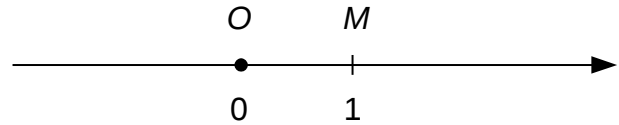
Τα πιο γνωστά αριθμοσύνολα είναι:

1. $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, όπου $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
2. $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακέραιων αριθμών, όπου $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
3. $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών, όπου $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} / \kappa, \lambda \in \mathbb{Z} \text{ με } \lambda \neq 0 \right\}$
4. Το σύνολο των άρρητων αριθμών, δηλαδή των αριθμών που δεν μπορούν να γραφούν σε μορφή κλάσματος, όπως ο $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ και άλλοι.
5. $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών, όπου το $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$ το σύνολο των άρρητων.

Είναι φανερό ότι: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Ο ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο άξονας των αριθμών είναι μια ευθεία, πάνω στην οποία έχει οριστεί η φορά (συνήθως ως θετική υποθέτουμε την φορά από τα αριστερά προς τα δεξιά και την σημειώνουμε με διάνυσμα, δηλ. βέλος), έχει επιλεγεί η αρχή του άξονα, δηλαδή το σημείο O και το μοναδιαίο (ευθύγραμμο) τμήμα (η μονάδα της κλίμακας).



Κάθε αριθμός μπορεί να απεικονιστεί ως ένα μοναδικό σημείο στον άξονα των αριθμών. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε σημείο του άξονα των αριθμών απεικονίζει κάποιον αριθμό. Ο αριθμός, για την απεικόνιση του οποίου χρησιμοποιείται ένα σημείο του άξονα, είναι και η συντεταγμένη του σημείου αυτού.

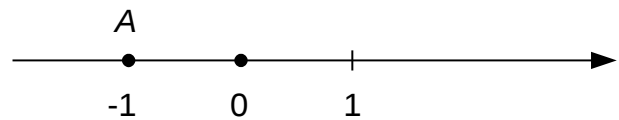
Ο άξονας των αριθμών καλείται συχνά και συντεταγμένη ευθεία ή **ευθεία των αριθμών**.

Στον αριθμό 0 αντιστοιχεί πάνω στον άξονα των αριθμών το σημείο O . Οι θετικοί αριθμοί απεικονίζονται με σημεία που είναι τοποθετημένα δεξιά από την αρχή του άξονα, ενώ οι αρνητικοί από τα αριστερά. Για να απεικονίσουμε πάνω στην ευθεία το σημείο A , που αντιστοιχεί στον αριθμό x , θα πρέπει να μετρήσουμε από την αρχή του άξονα, στην σωστή φορά, την απόσταση $|x|$.

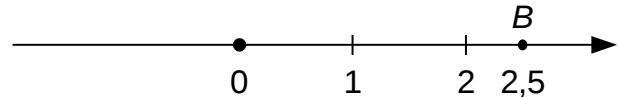
Παράδειγμα:

Να κατασκευάσετε πάνω στον άξονα των αριθμών τα σημεία με συντεταγμένες: $A(-1)$, $B(2,5)$, $\Gamma(-4)$.

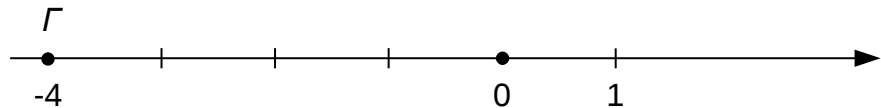
α) Θα μετρήσουμε από την αρχή του άξονα, δηλαδή το σημείο 0 , και αριστερά του, απόσταση ίσο με 1 όσο και το μοναδιαίο τμήμα. Θα έχουμε τότε το σημείο $A(-1)$.



β) Θα μετρήσουμε από την αρχή του άξονα προς τα δεξιά απόσταση ίση με $2,5$ μοναδιαία τμήματα. Θα έχουμε το σημείο $B(2,5)$

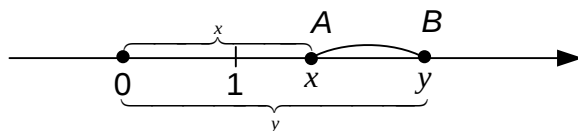


γ) Θα μετρήσουμε από την αρχή του άξονα προς τα αριστερά απόσταση ίση με 4 μοναδιαία τμήματα. Θα έχουμε το σημείο $\Gamma(-4)$

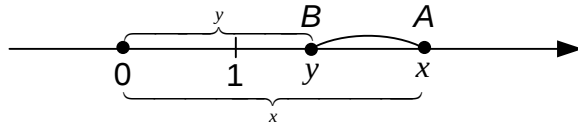


Με αυτόν ακριβώς τον τρόπο, με τη μορφή ενός σημείου, μπορούμε να απεικονίσουμε επίσης οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, είτε είναι απλό ή δεκαδικό κλάσμα, είτε άρρητος αριθμός, είτε το 0 . Η απεικόνιση όλων των πραγματικών αριθμών, δηλαδή των ρητών και των άρρητων, σχηματίζουν ολόκληρο τον άξονα των αριθμών (γεμίζουν όλη την ευθεία). Για τον λόγο αυτό, ο άξονας των αριθμών καλείται συχνά και ως «**η πραγματική ευθεία**» ή «**η ευθεία των πραγματικών αριθμών**». Κατά την απεικόνιση των αριθμών με σημεία πάνω στον άξονα, ο μεγαλύτερος αριθμός θα είναι πάντοτε δεξιότερα. Αυτό το γεγονός το χρησιμοποιούμε για τη σύγκριση δύο αριθμών με τη βοήθεια του άξονα των αριθμών. Για παράδειγμα: $-2,1 > -2,5$, αφού το $-2,1$ είναι δεξιότερα τοποθετημένο στον άξονα των αριθμών.

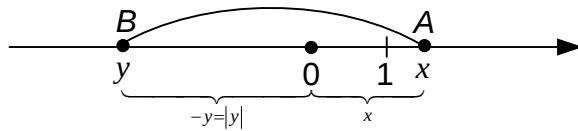
Εάν $A(x)$ και $B(y)$ είναι δύο σημεία του άξονα των αριθμών, τότε η απόσταση μεταξύ τους μπορεί να υπολογιστεί με τον τύπο: $AB = |x - y|$.



$$AB = y - x$$



$$AB = x - y$$



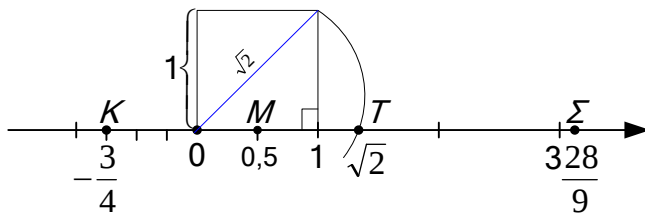
$$AB = x + (-y) = x - y$$

Οι περιπτώσεις αυτές μπορούν να ενοποιηθούν σε ένα ενιαίο τύπο: $AB = |x - y|$

Άσκηση 1^η

Να απεικονιστούν στον αριθμητικό άξονα τα σημεία $M(0,5)$, $K(-\frac{3}{4})$, $\Sigma(\frac{28}{9})$, $T(\sqrt{2})$

Λύση:



α) Αφού $0,5 > 0$, άρα και το σημείο $M(0,5)$ θα τοποθετηθεί δεξιότερα από το μηδέν. Θα μετρήσουμε, δεξιά από το μηδέν, απόσταση ίση με το μισό του μοναδιαίου διαστήματος. Έχουμε το $M(0,5)$

β) $-\frac{3}{4} < 0$, σημαίνει ότι το σημείο $K(-\frac{3}{4})$ είναι αριστερότερα από το μηδέν. Για να μετρήσουμε την απόσταση, ίση με $\frac{3}{4}$ του μοναδιαίου διαστήματος, χωρίζουμε το μοναδιαίο διάστημα σε 4 ίσα τμήματα και μετρούμε 3 απ' αυτά.

γ) $\frac{28}{9} = 3\frac{1}{9} \Rightarrow$ θα μετρήσουμε δεξιά από το 0 απόσταση ίση με $3\frac{1}{9}$ του μοναδιαίου διαστήματος.

δ) 1^η μέθοδος Θα σημειώσουμε περίπου το σημείο $T(\sqrt{2})$, γνωρίζοντας ότι $\sqrt{2} \approx 1,4$.

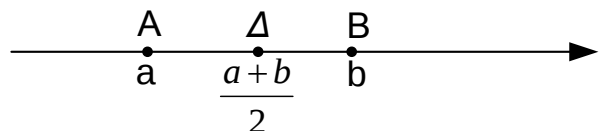
2^η μέθοδος Για τον ακριβή υπολογισμό, θα εξετάσουμε πρώτα το ορθογώνιο τρίγωνο με καθέτους ίσους με την μονάδα της κλίμακας μετά, με τη βοήθεια του διαβήτη, θα προσδιορίσουμε στον άξονα των αριθμών δεξιά απόσταση ίση με την υποτείνουσα. Αυτή θα είναι $\sqrt{2}$.

Άσκηση 2^η

Πάνω στον άξονα των αριθμών να πάρετε τα σημεία $A(a)$ και $B(b)$. Να κατασκευάσετε το σημείο που απεικονίζει τον αριθμό $\frac{a+b}{2}$.

Λύση:

Για να προσδιορίσουμε το σημείο που αντιστοιχεί στο $\frac{a+b}{2}$, θα υπολογίσουμε από το σημείο B απόσταση



$B\Gamma$ ίση με a δηλαδή $B\Gamma = OA$ και μετά θα βρούμε το μέσο του τμήματος OG , δηλαδή το σημείο Δ . Το

σημείο αυτό, το Δ , απεικονίζει τον αριθμό $\frac{a+b}{2}$. Παρατηρήστε ότι το σημείο Δ είναι και μέσο του

AB .

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

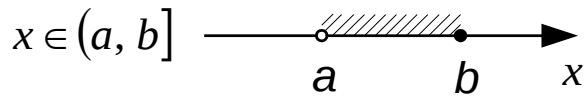
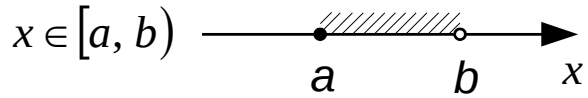
Έστω a και b δύο πραγματικοί αριθμοί, με $a < b$. Αριθμητικό διάστημα καλείται το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν μια απλούστατη σχέση ανισώσεων. Ας εξετάσουμε τα είδη των διαστημάτων.

1. **Ανοικτό διάστημα** είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την ανισότητα $a < x < b$. Συμβολίζεται με (a, b) . Οι αριθμοί a και b καλούνται άκρα του διαστήματος, το a κάτω άκρο και το b πάνω άκρο.

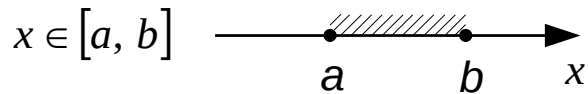
Πάνω στην ευθεία των αριθμών τα άκρα του διαστήματος απεικονίζονται με μη χρωματισμένα, “τρυπημένα” σημεία. $x \in (a, b)$



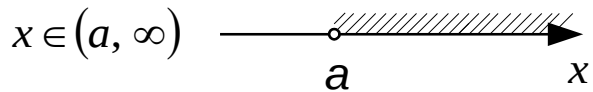
2. Ημιοικτό διάστημα είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις ανισώσεις της μορφής $a \leq x < b$ ή $a < x \leq b$. Συμβολίζεται με $[a, b)$ ή με $(a, b]$ αντίστοιχα. Εάν ο αριθμός δεν μπαίνει στην ανισότητα, τότε κατά την γραφή του διαστήματος, δίπλα στον αριθμό αυτό γράφουμε παρένθεση και διαβάζεται “ανοικτό”, ενώ αν μετέχει στην ανισότητα, γράφουμε αγκύλη και διαβάζεται “κλειστό”. Το άκρο του διαστήματος που ανήκει σε αυτό το διάστημα το απεικονίζουμε χρωματισμένο.



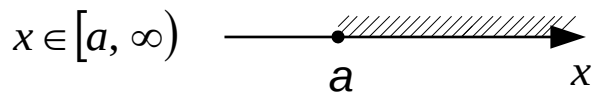
3. Κλειστό διάστημα είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την ανίσωση $a \leq x \leq b$. Συμβολίζεται με $[a, b]$. Το κλειστό διάστημα συμπεριλαμβάνει και τα δύο του άκρα τα οποία απεικονίζονται χρωματισμένα.



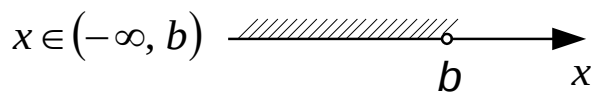
4. Το διάστημα (a, ∞) είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την ανίσωση $x > a$.



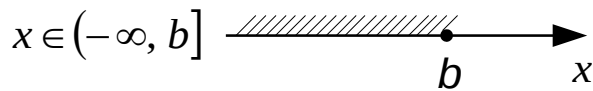
5. Το διάστημα $[a, \infty)$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την ανίσωση $x \geq a$.



6. Το διάστημα $(-\infty, b)$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την ανίσωση $x < b$.



7. Το διάστημα $(-\infty, b]$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την ανίσωση $x \leq b$.



8. Το διάστημα $(-\infty, \infty)$ είναι όλος ο αριθμητικός άξονας.

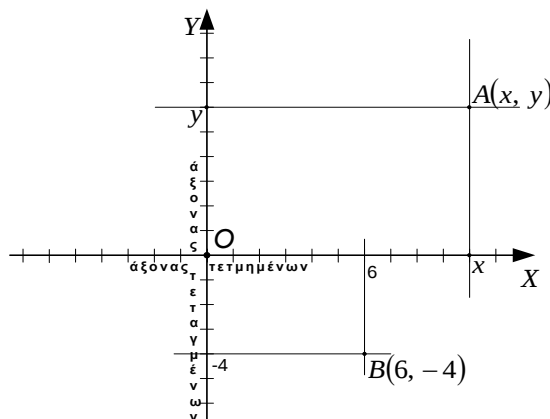
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σύστημα συντεταγμένων είναι μια κατασκευή που χρησιμοποιείται για να οριστεί η θέση ενός σημείου πάνω σε μια ευθεία ή σε ένα επίπεδο ή στο χώρο με χρήση διατεταγμένου συνόλου αριθμών.

Το σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο αποτελείται από δύο προσανατολισμένες ευθείες, κάθετες μεταξύ τους, οι οποίες είναι και άξονες αριθμών και οι οποίες καλούνται συμβατικά **άξονας τετμημένων** και **άξονας τεταγμένων** και συμβολίζονται αντίστοιχα με **Ox** και **Oy**. Το σημείο όπου τέμνονται, το συμβολίζουμε **O** και λέγεται **αρχή του συστήματος συντεταγμένων**.

Ένα σημείο πάνω στο επίπεδο προσδιορίζεται μοναδικά από ένα ζεύγος αριθμών, την **τετμημένη** και την **τεταγμένη**. Η τετμημένη είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα y και η τεταγμένη είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα x. Η τετμημένη και η τεταγμένη αποτελούν τις συντεταγμένες του σημείου. Η αρχή των αξόνων O ταυτίζεται με το σημείο (0,0). Δηλαδή, έχει μηδενική απόσταση από τους άξονες x και y. Επιπλέον ορίζεται απόσταση ίση με 1 (μοναδιαίο τμήμα), σύμφωνα με την οποία αριθμούνται οι άξονες.

Ας εξετάσουμε ένα τυχαίο σημείο A του επιπέδου στο οποίο έχουμε ορίσει το σύστημα συντεταγμένων. Θα προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του. Για να το πετύχουμε, θα φέρουμε ευθείες παράλληλες στους άξονες και που διέρχονται από το σημείο A. Η ευθεία, που είναι παράλληλη στον άξονα των τεταγμένων, τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο X. Η συντεταγμένη x του σημείου αυτού, πάνω σ' αυτόν τον άξονα (Ox) καλείται **τετμημένη** του A ή η **πρώτη συντεταγμένη**. Η ευθεία, που είναι παράλληλη στον άξονα των τετμημένων, τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Y. Η συντεταγμένη y του σημείου αυτού, πάνω στον άξονα (Oy) καλείται **τεταγμένη** του A ή η **δεύτερη συντεταγμένη**.

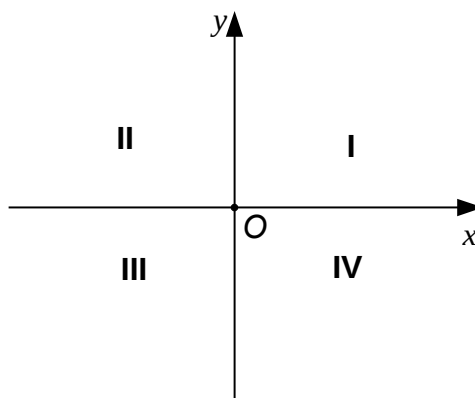


Το διατεταγμένο ζεύγος των αριθμών των συντεταγμένων (x, y) καλείται **συντεταγμένες του σημείου A**.

Δηλαδή, μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου και της θέσης του σημείου στο επίπεδο έχει οριστεί μοναδική σχέση:

1. Σε κάθε σημείο του επιπέδου του αντιστοιχεί διατεταγμένο ζεύγος αριθμών.
2. Σε διαφορετικά σημεία του επιπέδου αντιστοιχούν διαφορετικά διατεταγμένα ζεύγη αριθμών.
3. Σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου.

Συχνά, επειδή όταν ορίζεται ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα επίπεδο, τότε το επίπεδο αυτό χωρίζεται σε τέσσερις περιοχές, τις οποίες τις καλούμε **τεταρτημόρια**. Τα τεταρτημόρια τα αριθμούμε με λατινική αρίθμηση και καλούνται: το πρώτο, το δεύτερο, το τρίτο και το τέταρτο τεταρτημόριο αντίστοιχα.



ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός, αν αυτός δεν είναι αρνητικός, ή ο αντίθετός του, αν είναι αρνητικός. Συμβολισμός:

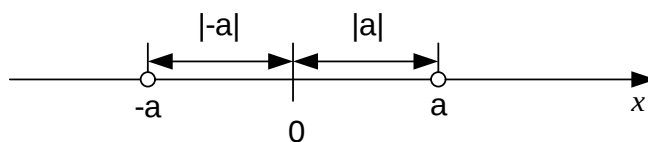
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{εάν } a \geq 0 \\ -a, & \text{εάν } a < 0 \end{cases}$$

Ιδιότητες της απόλυτης τιμής:

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. $ a \geq 0$ | 5. $ a ^2 = a^2$ |
| 2. $ a = -a $ | 6. $ a+b \leq a + b $ |
| 3. $ ab = a b $ | 7. $ a+b \geq a - b $ |
| 4. $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$ | 8. $ a-b \geq a - b $ |

Ας εξετάσουμε την γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας της απόλυτης τιμής ενός αριθμού.

Η απόλυτη τιμή του αριθμού a είναι η απόσταση από την αρχή (δηλαδή το 0) έως το σημείο που απεικονίζει τον αριθμό a .

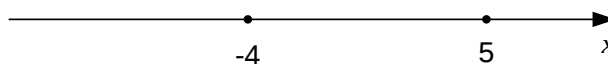


Η απόσταση μεταξύ των σημείων της ευθείας υπολογίζεται με τη χρήση των απόλυτων τιμών. Έστω ένα σημείο A με συντεταγμένη a και ένα σημείο B με συντεταγμένη b , τότε η απόσταση μεταξύ των σημείων A και B υπολογίζεται από τον τύπο: $\rho = |a - b|$.

1° Παράδειγμα:

Αν $A(-4)$ και $B(5)$, τότε:

$$\rho(A,B) = |-4 - 5| = |-9| = 9$$

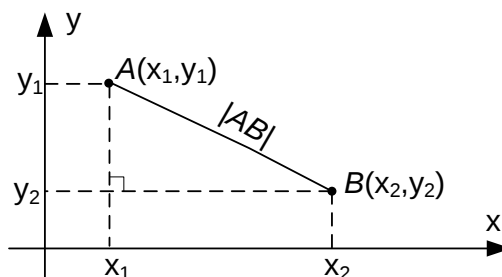


2° Παράδειγμα:

Ας πάρουμε στο σύστημα συντεταγμένων δύο διαστάσεων (στο επίπεδο) δύο σημεία: $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Τότε η απόσταση μεταξύ αυτών των δύο σημείων στο σύστημα συντεταγμένων δύο διαστάσεων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Επίσης η απόσταση μεταξύ δύο σημείων μπορεί να υπολογιστεί με βάση τις συντεταγμένες τους στον τρισδιάστατο χώρο. Η απόσταση μεταξύ τους τότε υπολογίζεται από τον τύπο:

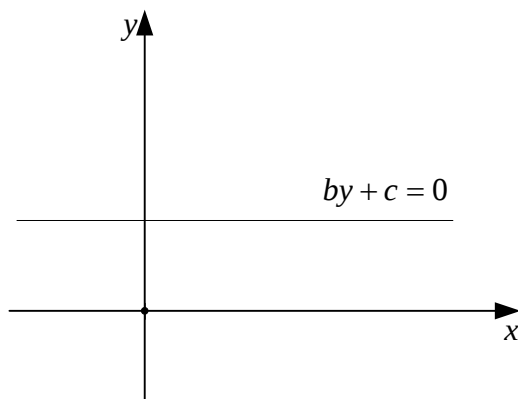
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ όπου } A(x_1, y_1, z_1) \text{ και } B(x_2, y_2, z_2)$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

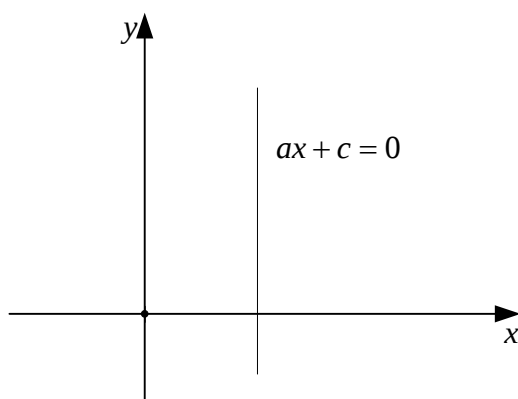
Η εξίσωση της ευθείας στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχει τη μορφή:

$ax + by + c = 0$, όπου $a^2 + b^2 \neq 0$, δηλαδή οι συντελεστές a και b δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν.

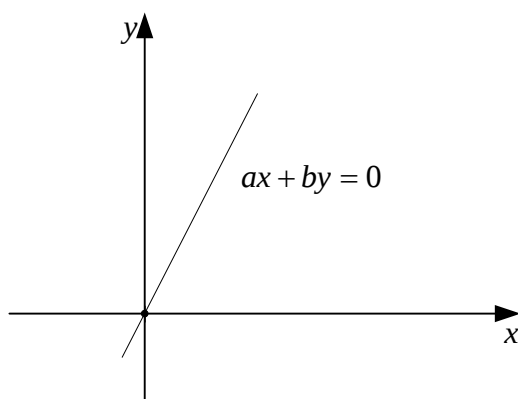
1. Εάν $a = 0, b \neq 0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα Ox ή συμπίπτει μ' αυτόν (εάν $c = 0$).



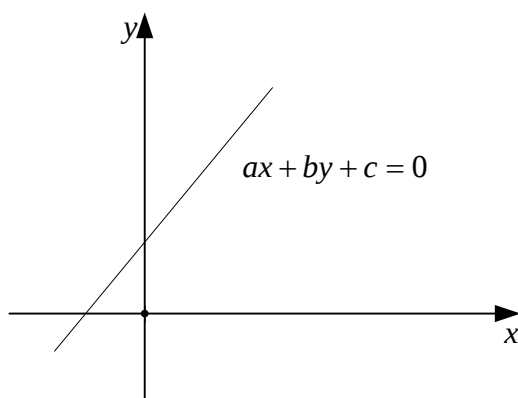
2. Εάν $a \neq 0, b = 0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα Oy ή συμπίπτει μ' αυτόν (εάν $c = 0$).



3. Εάν $c = 0, a \neq 0, b \neq 0$, τότε η ευθεία περνά από την αρχή των συντεταγμένων.



4. Εάν $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων.



Η εξίσωση κάθε ευθείας, που δεν είναι παράλληλη στον άξονα Oy (δηλ. όταν $b \neq 0$), μπορεί να γραφεί στη μορφή: $y = \alpha + \beta x$, όπου ο αριθμός β (ο συντελεστής του x) καλείται *συντελεστής κλίσης* της ευθείας και είναι η εφαπτομένη της γωνίας ($\hat{\omega}$) της κλίσης της ευθείας στη θετική φορά του άξονα των τετμημένων (Ox), δηλαδή $\beta = \varepsilon\phi(\hat{\omega})$. Ο αριθμός α είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας αυτής και του άξονα Oy .

