

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Έστω το άθροισμα: $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu$, τότε συμβολίζουμε με:

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_\nu$$

όπου το σύμβολο $\sum_{i=1}^{\nu} x_i$ παριστάνει μια συντομογραφία του αθροίσματος $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu$ και διαβάζεται “άθροισμα των x_i από $i=1$ έως ν ”. Συχνά, όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης, συμβολίζεται και ως $\sum x_i$ ή ακόμα πιο απλά με $\sum x$.

Ιδιότητα: το σύμβολο του δείκτη i που εμφανίζεται στο άθροισμα δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα και μπορεί στη θέση του να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε άλλος, δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{r=1}^{\nu} x_r = \sum_{j=1}^{\nu} x_j = \dots$$

Αυτό που χρειάζεται είναι να ξέρουμε το “σημείο” έναρξης ($i=1$) και του τερματισμού ($i=\nu$) για να μπορούμε να προσδιορίσουμε τους όρους $x_1, x_2, \dots, x_\nu$.

Ιδιότητα: (Για την ευρύτητα των γνώσεων και μόνο)

$$x_k + x_{k+1} + \dots + x_\nu = \sum_{i=k}^{\nu} x_i = \sum_{j=0}^{\nu-k} x_{k+j} = x_k + x_{k+1} + \dots + x_\nu$$

Αλλαγή μεταβλητής

Πιο συγκεκριμένα: $S = \sum_{i=1}^{\nu} x_i$, θέτουμε $j=i-k \Rightarrow i=j+k$ και άρα ο όρος x_i αντικαθίσταται από τον x_{j+k} .

Τα όρια $i=k \Rightarrow j=k-k=0$, ενώ αν $i=\nu \Rightarrow j=\nu-k$ επομένως:

$$S = \sum_{i=k}^{\nu} x_i = \sum_{j=0}^{\nu-k} x_{j+k}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- $1 + 2 + \dots + \nu = \sum_{i=1}^{\nu} i$
- $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} a_i^2$
- $\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_\nu y_\nu$
- $\sum_{i=1}^{\nu} (ia_i + b_i) = (1a_1 + b_1) + (2a_2 + b_2) + \dots + (\nu a_\nu + b_\nu)$

5. $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2 \beta_i = \alpha_1^2 \beta_1 + \alpha_2^2 \beta_2 + \alpha_3^2 \beta_3 + \dots + \alpha_{\nu}^2 \beta_{\nu}$
6. $\sum_{i=k}^l (a_i + \frac{b_i}{i}) = (a_k + \frac{b_k}{k}) + (a_{k+1} + \frac{b_{k+1}}{k+1}) + \dots + (a_l + \frac{b_l}{l})$

Κύριες ιδιότητες

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_{\nu} + b_{\nu}) = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{\nu} + b_1 + b_2 + \dots + b_{\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} a_i + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^{\nu} \lambda \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \quad (2)$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^m (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m y_i \quad (3)$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^{\nu} a = \nu a \quad (4)$$

Ασκήσεις:

$$1. \quad \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \sum_{i=1}^{\nu} x_i) = (1 - \nu) \sum_{i=1}^{\nu} x_i$$

$$2. \quad \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}) = 0$$

$$3. \quad \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu \bar{x}^2$$