

Κεφάλαιο 5

Παράμετροι μονομεταβλητών πληθυσμών

5.1 Γενικά

Η συμπύκνωση των δεδομένων που γίνεται με τους πίνακες συχνά δεν είναι αρκετή. Για το λόγο αυτό για την περαιτέρω συμπύκνωση των δεδομένων μας, αλλά και για μεγαλύτερη δυνατότητα αφομοίωσης τους, κάνουμε μια παραπέρα συμπύκνωση και συγκεφαλαιώση με την αντικατάσταση των πινάκων συχνότητας από ορισμένους αντιπροσωπευτικούς **αριθμούς** οι οποίοι ονομάζονται **στατιστικές παράμετροι** ή **μέτρα** (=αριθμητικά μεγέθη). Αυτά χαρακτηρίζουν:

- τη θέση ή κεντρική τάση,
- τη διασπορά ή μεταβλητότητα και
- τη μορφολογία ή τη μορφή

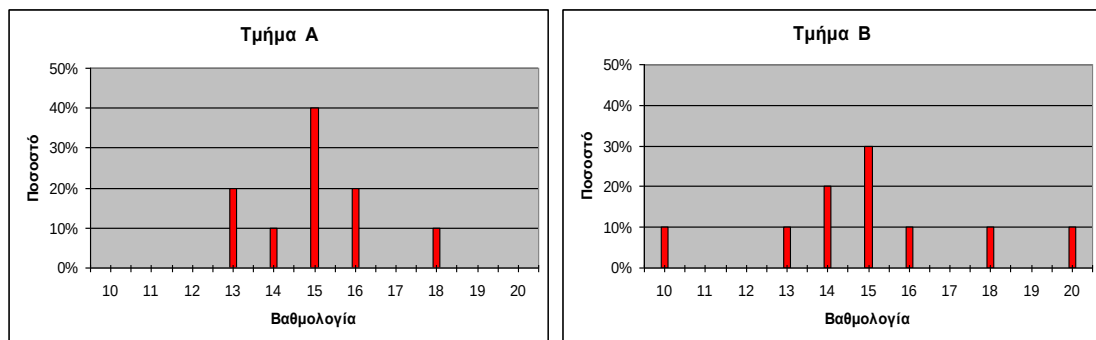
του πληθυσμού που ερευνούμε και **διευκολύνουν επιπλέον πάρα πολύ στις συγκρίσεις ομοειδών ομάδων.**

Παράδειγμα: Η βαθμολογία των μαθητών δύο τμημάτων στο ίδιο μάθημα έχει ως εξής:

Τμήμα Α: 13 13 13 13 14 14 15 15 15 15 15 15 15 15 16 16 16 16 18 18

Τμήμα Β: 10 13 14 14 15 15 15 16 18 20

Τα διαγράμματα των σχετικών συχνοτήτων τους είναι τα παρακάτω:



Παρατηρούμε λοιπόν ότι η βαθμολογία και των δύο τμημάτων είναι συγκεντρωμένη γύρω από το 15, αλλά το δεύτερο τμήμα παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά βαθμών. Δηλαδή ενώ δείχνουν να έχουν την ίδια «κεντρική τιμή», εν τούτοις όμως το δεύτερο τμήμα είναι περισσότερο διασκορπισμένο γύρω από αυτήν την τιμή.

5.2. Μέτρα κεντρικής τάσης

Οι παράμετροι αυτές ορίζουν το σημείο γύρω από το οποίο συσσωρεύονται οι διάφορες τιμές ενός πληθυσμού και βρίσκονται στο "κέντρο" μιας σειράς παρατηρήσεων εφ' όσον ο πληθυσμός παρουσιάζει ομοιογένεια. Τα μέτρα αυτά είναι πάντα μεταξύ της μικρότερης και της μεγαλύτερης τιμής.

Αντικειμενικός σκοπός αυτών των παραμέτρων είναι να αντιπροσωπεύουν ένα πληθυσμό μιας μεταβλητής κατά τον πιο απλό και σύντομο τρόπο. Οι κυριότεροι παράμετροι κεντρικής τάσης είναι:

1. **αριθμητικός μέσος,**
2. **γεωμετρικός μέσος και**
3. **αρμονικός μέσος.**

5.2.1. Αριθμητικός Μέσος

Ο αριθμητικός μέσος διακρίνεται σε:

- **αστάθμητο και**
- **σταθμικό**

Αστάθμητος αριθμητικός μέσος

Ορισμός: Αν οι N τιμές μίας μεταβλητής X είναι οι παρακάτω $x_1, x_2, \dots, x_N$, τότε ο αστάθμητος αριθμητικός μέσος συμβολίζεται με το μ και δίνεται από τη σχέση:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Παράδειγμα: Οι βαθμοί ενός μαθητή σε διάφορα μαθήματα είναι: 16, 15, 14, 17, 14, 15, 18, 16, 13, 12. Να βρεθεί η μέση βαθμολογία του μαθητή.

Λύση:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{16+15+14+17+14+15+18+16+13+12}{10} = \frac{150}{10} = 15,0$$

Παράδειγμα: Δίνονται τα παρακάτω ύψη (σε cm):

170, 180, 178, 165, 170, 168, 175, 175, 173, 162, 160, 170, 167, 177, 180, 170, 182, 178, 165, 178, 156, 187, 172, 173, 167, 187, 170, 180, 178, 191, 176, 169, 167, 166, 179, 178, 180, 164, 170, 173

Να βρεθεί ο αριθμητικός μέσος.

Λύση:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{6.926}{40} = 173,15 \text{ cm}$$

Παράδειγμα - Ερμηνεία: Τα χρήματα που είχαν μαζί τους οι μαθητές μιας τάξης (σε €): 50, 15, 10, 2, 43, 25, 21, 17.5, 32, 86, 29. Για να βρούμε τον μέσο αθροίζουμε όλα αυτά τα ποσά και το άθροισμα αυτό το διαιρούμε με το πλήθος των ατόμων, δηλαδή τα συγκεντρώνουμε όλα μαζί και μετά τα μοιράζουμε στα άτομα αυτά σε ίσες ποσότητες!

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{330,5}{11} = 30,045 \text{ € / άτομο. Το ποσό των } 30,045 \text{ € είναι ο μέσος.}$$

Σταθμικός αριθμητικός μέσος

Όταν τα στατιστικά δεδομένα δίνονται σε μορφή κατανομής συχνοτήτων διακρίνουμε δύο περιπτώσεις υπολογισμού του αριθμητικού μέσου.

α) Όταν η μεταβλητή είναι ασυνεχής ή διακριτή

Στην περίπτωση αυτή κατά την οποία η μεταβλητή είναι ασυνεχής και κάθε τιμή εμφανίζεται πολλές φορές, δηλαδή παρουσιάζει συχνότητα, για τον υπολογισμό του αριθμητικού μέσου πολλαπλασιάζουμε την κάθε τιμή της μεταβλητής με τον αντίστοιχο αριθμό συχνοτήτων και διαιρούμε το άθροισμα των γινομένων με τον συνολικό αριθμό συχνοτήτων. Οι παρακάτω πράξεις κωδικοποιούνται στον τύπο:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Παράδειγμα: Η ποσοστιαία κατανομή των νοικοκυριών των αστικών περιοχών της χώρας ως προς τον αριθμό των δωματίων έχει όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας. Ζητείται ο αριθμητικός μέσος.

Αριθμός δωματίων (x_i)	Ποσοστό (f_i %)	$x_i f_i$
1	17	17
2	35	70
3	26	78
4	14	56
5	5	25
6	2	12
7	1	7
ΣΥΝΟΛΟ	100	265

Ο αριθμητικός μέσος θα είναι:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{265}{100} = 2,65$$

Ο αριθμός 2,65 σημαίνει: ότι κάθε νοικοκυριό που κατοικεί σε μια αστική πόλη διαθέτει κατά μέσο όρο 2,65 δωμάτια.

β) Όταν τα δεδομένα εμφανίζονται με μορφή κατανομής συχνοτήτων κατά τάξεις (στην περίπτωση συνεχούς μεταβλητής)

Στην περίπτωση αυτή για τον υπολογισμό του αριθμητικού μέσου με την άμεση μέθοδο βρίσκουμε τις κεντρικές τιμές όλων των τάξεων, πολλαπλασιάζουμε τις κεντρικές τιμές με τις αντίστοιχες συχνότητες κάθε τάξης, προσθέτουμε τα γινόμενα και διαιρούμε το άθροισμά του με το άθροισμα των συχνοτήτων. Ο τύπος είναι:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Παράδειγμα: Ένα εργοστάσιο απασχολεί 80 εργάτες. Η κατανομή των ημερομισθίων έχει όπως φαίνεται στον πίνακα:

Τάξεις (ημερ/θια.) €	Αριθμ. εργατών (f_i)	Κεντρικές τιμές (x_i)	$x_i f_i$
70-80	4	75	300
80-90	8	85	680
90-100	18	95	1.710
100-110	20	105	2.100
110-120	30	115	3.450
Σύνολο	80		8.240

Να υπολογιστεί το μέσο ημερομίσθιο.

Λύση:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{8.240}{80} = 103 \text{ €}$$

Επόμενος το μέσο ημερομίσθιο των 103 €. είναι το ημερομίσθιο που θα έπαιρνε κάθε ένας από τους 80 εργάτες αν η αμοιβή ήταν για όλους η ίδια!!!

Παράδειγμα: Δίνονται τα παρακάτω ύψη (σε cm):

170, 180, 178, 165, 170, 168, 175, 175, 173, 162, 160, 170, 167, 177, 180, 170, 182, 178, 165, 178, 156, 175, 172, 173, 167, 187, 170, 180, 178, 191, 176, 169, 167, 166, 179, 178, 180, 164, 170, 173

Να βρεθεί ο αριθμητικός μέσος με βάση τον πίνακα των συχνοτήτων. Στη συνέχεια να συγκριθεί το αποτέλεσμα με το αντίστοιχο προηγούμενο παράδειγμα.

Λύση:

Πίνακας

Ύψος σε cm	Συχνότητα f_i	Κεντρικές τιμές x_i	$x_i f_i$
156-162	2	159	318
162-168	8	165	1.320
168-174	12	171	2.052
174-180	11	177	1.947
180-186	5	183	915
186-192	2	189	378
Σύνολο	40		6.930

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6.930}{40} = 173,25 \text{ cm}$$

Παρατηρούμε ότι οι μέσες τιμές δεν είναι οι ίδιες. Η έστω και μικρή αυτή διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την ομαδοποίηση υποθέσαμε ότι όλες οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στην κλάση τους και επομένως ότι οι τιμές της μεταβλητής σε κάθε κλάση εκπροσωπούνται από την αντίστοιχη κεντρική τιμή x_i . Η υπόθεση αυτή σημαίνει απώλεια πληροφοριών για τις αρχικές τιμές. Χάνουμε λίγο ως προς την ακρίβεια κερδίζουμε όμως χρόνο!

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση του σταθμικού αριθμητικού μέσου θα μπορούσαμε να πούμε ότι για τον υπολογισμό του η κάθε μέτρηση λαμβάνεται με συντελεστή ίσο προς τη συχνότητα αυτής.

Όλες οι πιο πάνω μέθοδοι υπολογισμού του μέσου ήταν οι **άμεσες μέθοδοι**.

Έμμεση μέθοδος υπολογισμού του αριθμητικού μέσου

Ο υπολογισμός του αριθμητικού μέσου παρουσιάζει δυσκολίες στις πράξεις όταν οι κεντρικές τιμές των τάξεων και οι συχνότητες είναι *μεγάλοι αριθμοί*. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε αντί της άμεσης μεθόδου, την **έμμεση μέθοδο** υπολογισμού του αριθμητικού μέσου.

α) Το εύρος των τάξεων είναι σταθερό

Για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου υποθέτουμε ότι μια από τις κεντρικές τιμές των τάξεων, συνήθως αυτή που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη συχνότητα ή που κατέχει κεντρική θέση, παίρνεται ως προσωρινός αριθμητικός μέσος x_0 . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις αποκλίσεις της κάθε κεντρικής τιμής από τον προσωρινό μέσο σε μονάδες διαστημάτων τάξεων. Οι αποκλίσεις συμβολίζονται με ξ_i και δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\xi_i = \frac{x_i - x_0}{\delta}$$

όπου δ το πλάτος των τάξεων.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον αριθμητικό μέσο με την **έμμεση μέθοδο**, κάνοντας χρήση του τύπου:

$$\mu = x_0 + \delta \frac{\sum f_i \xi_i}{\sum f_i}$$

Παράδειγμα: Οι ηλικίες μιας ομάδας 264 ατόμων παρουσιάζονται στο πίνακα:

Ηλικία	Αριθμός. ατόμων
15-25	34
25-35	38
35-45	53
45-55	55
55-65	46
65-75	27
75-85	11
Σύνολο	264

Να υπολογιστεί η μέση ηλικία με την άμεση και την έμμεση μέθοδο.

Λύση:

Για τον υπολογισμό της μέσης ηλικίας με την άμεση και την έμμεση μέθοδο διαμορφώνουμε τον πίνακά μας ως εξής:

Ηλικία	Κ. Τ. x_i	Αριθμός. ατόμων f_i	$x_i f_i$	$\xi_i = \frac{x_i - x_0}{\delta}$	$f_i \xi_i$
15-25	20	34	680	-3	-102
25-35	30	38	1.140	-2	-76
35-45	40	53	2.120	-1	-53
45-55	50	55	2.750	0	0
55-65	60	46	2.760	1	46
65-75	70	27	1.890	2	54
75-85	80	11	880	3	33
Σύνολο		264	12.220		-98

Για την άμεση μέθοδο υπολογισμού του μέσου έχουμε:

$$\mu_a = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{12.220}{264} = 46,3 \acute{\epsilon}\tau\eta.$$

Για την έμμεση μέθοδο αρχικά εντοπίζουμε τον προσωρινό μέσο x_0 που είναι η τιμή 50. Μετά βάση τον τύπου έχουμε: $\mu = x_0 + \delta \frac{\sum f_i \xi_i}{\sum f_i} = 50 + 10 \frac{-98}{264} = 46,3 \acute{\epsilon}\tau\eta.$

β) Το εύρος των τάξεων δεν είναι σταθερό

Με την έμμεση μέθοδο, όταν το εύρος των τάξεων δεν είναι σταθερό παίρνουμε ως αυθαίρετο προσωρινό μέσο μια τιμή x_0 μια οποιαδήποτε τιμή από τις κεντρικές τιμές της μεταβλητής X . Επίσης παίρνουμε ως πλάτος δ αυθαίρετα ένα αριθμό ο οποίος μας διευκολύνει στους υπολογισμούς, κατά προτίμηση παίρνουμε τον αριθμό **10** ή **100** και εργαζόμαστε ανάλογα με τα προηγούμενα:

Θέτουμε $\xi_i = \frac{x_i - x_0}{\delta}$ και ο έμμεσος αριθμητικός μέσος δίνεται από τον τύπο:

$$\mu = x_0 + \delta \frac{\sum f_i \xi_i}{\sum f_i}$$

Παράδειγμα: Στον παρακάτω πίνακα δίνονται (σε χιλιάδες €.) τα καθαρά μηνιαία κέρδη 100 επιχειρήσεων για το έτος 2008:

Τάξεις	f_i
20-40	10
40-100	20
100-200	40
200-220	30
Σύνολο	100

Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμητικός με την έμμεση και άμεση μέθοδο.

Λύση:

Επειδή το πλάτος των τάξεων είναι άνισο παίρνουμε αυθαίρετα $x_0 = 210$ και $\delta = 10$ και στη συνέχεια καταρτίζουμε τον πίνακα:

Τάξεις	f_i	x_i	$\xi_i = \frac{x_i - x_0}{\delta}$	$f_i \xi_i$	$x_i f_i$
20-40	10	30	-18	-180	300
40-100	20	70	-14	-280	1.400
100-200	40	150	-6	-240	6.000
200-220	30	210	0	0	6.300
Σύνολο	100			-700	14.000

Έμμεση μέθοδος: $\mu = x_0 + \delta \frac{\sum f_i \xi_i}{\sum f_i} = 210 + 10 \frac{-700}{100} = 140 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$

Άμεση μέθοδος: $\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{14.000}{100} = 140 \text{ χιλ. } \delta\rho\chi.$

Ιδιότητες του αριθμητικού μέσου

1. Το άθροισμα των διαφορών των τιμών της μεταβλητής από το αριθμητικό μέσο αυτών είναι πάντοτε μηδέν $\sum (x_i - \mu) = 0$.

Απόδειξη:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \mu) = \sum_{i=1}^N x_i - N\mu = N\mu - N\mu = 0$$

γιατί γνωρίζουμε ότι: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i = \mu \cdot N$ και $\sum_{i=1}^N \mu = N \cdot \mu$

2. Αν προσθέσουμε στις τιμές της μεταβλητής X , μια σταθερή ποσότητα x_0 , τότε ο μέσος αριθμητικός των αρχικών τιμών αυξάνεται κατά τη σταθερή αυτή ποσότητα.

Απόδειξη:

Αν x_i είναι μια τιμή της μεταβλητής X , μετά την αύξηση θα γίνει $y_i = x_i + x_0$, επομένως:

$$\mu_y = \frac{\sum (x_i + x_0)}{N} = \frac{\sum x_i + \sum x_0}{N} = \mu_x + \frac{Nx_0}{N} = \mu_x + x_0$$

3. Αν αφαιρέσουμε από τις τιμές της μεταβλητής X μια σταθερή ποσότητα x_0 , τότε ο αριθμητικός μέσος των αρχικών τιμών μειώνεται κατά τη σταθερή αυτή ποσότητα.

Απόδειξη:

Όμοια με την προηγούμενη.

4. Αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές της μεταβλητής X με μια σταθερή ποσότητα x_0 , ο αριθμητικός μέσος πολλαπλασιάζεται με τη σταθερή αυτή ποσότητα.

Απόδειξη:

$$\frac{\sum x_i x_0}{N} = x_0 \frac{\sum x_i}{N} = x_0 \mu$$

5. Αν η μεταβλητή X είναι μια σταθερή ποσότητα, δηλ. $x_1 = x_2 = \dots = x_N = a$, τότε ο μέσος αριθμητικός είναι ίσος με τη σταθερή αυτή ποσότητα.

Απόδειξη:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a = \frac{1}{N} Na = a$$

6. Αν α και β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και μ_x η μέση αριθμητική τιμή της μεταβλητής X , τότε η μέση τιμή της μεταβλητής Y που προσδιορίζεται από τη σχέση: $y = \alpha + \beta \cdot x$ θα είναι $\mu_y = \alpha + \beta \cdot \mu_x$.

Απόδειξη:

$$\mu_y = \frac{1}{N} \sum y_i = \frac{1}{N} \sum (\alpha + \beta x_i) = \frac{1}{N} N\alpha + \beta \frac{1}{N} \sum x_i = \alpha + \beta \mu_x$$

5.2.2. Γεωμετρικός μέσος

Παράδειγμα - Ερμηνεία: Έστω ότι ένας εργάτης της οικοδομής έκτισε έναν παραλληλόγραμμο τοίχο με μήκος μ και ύψος ν . Πόση θα πρέπει να είναι η πλευρά ενός τετράγωνου τοίχου, ο οποίος θα απαιτούσε τα ίδια υλικά με τον παραλληλόγραμμο τοίχο;

Λύση:

Προφανώς μας ενδιαφέρει η επιφάνεια του τοίχου η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$E = \mu \cdot \nu.$$

Έστω ότι ο τετράγωνος τοίχος θα είχε πλευρά g , τότε η επιφάνειά του θα ήταν:

$$E = g^2 = \mu \cdot \nu \Leftrightarrow g = \sqrt[2]{\mu \cdot \nu}.$$

Ο γεωμετρικός μέσος διακρίνεται σε αστάθμητο και σταθμικό.

α) Αστάθμητος γεωμετρικός μέσος

Ορισμός: Αν δοθεί η σειρά των N παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_N$, τότε ο γεωμετρικός μέσος ορίζεται ως η νιοστή ρίζα του γινομένου αυτών. Δηλαδή:

$$G = \sqrt[N]{x_1 x_2 \dots x_N}$$

Ο υπολογισμός του γεωμετρικού μέσου γίνεται με λογαριθμοποίηση της πιο πάνω παράστασης, δηλαδή:

$$\log G = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_N}{N} = \frac{\sum \log x_i}{N},$$

δηλαδή ο λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου είναι ο αριθμητικός μέσος των λογαρίθμων των τιμών.)

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών 5, 8, 32, 125.

Λύση:

$$G = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Παίρνουμε τους λογάριθμους των δύο μελών της παραπάνω ισότητας και έχουμε:

$$\begin{aligned} \log G &= \frac{\log 5 + \log 8 + \log 32 + \log 125}{4} = \\ &= \frac{0,689 + 0,90309 + 1,50515 + 2,09690}{4} = 1,30103 \end{aligned}$$

Τώρα με απολογαρίθμηση προκύπτει ο μέσος γεωμετρικός $G = 20$.

β) Σταθμικός γεωμετρικός μέσος

Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ της μεταβλητής δοθούν σε πίνακα συχνοτήτων με τις αντίστοιχες συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_k$, τότε ο μέσος γεωμετρικός δίνεται από τον τύπο:

$$G = \sqrt[f_1]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}}$$

Ο παραπάνω τύπος, με τη βοήθεια των λογαρίθμων, γράφεται:

$$\log G = \frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \dots + f_k \log x_k}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i \log x_i}{\sum f_i}$$

Παράδειγμα: Δίνεται η παρακάτω κατανομή:

Τάξεις	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140
f_i	3	5	10	18	19	3

Να βρεθεί ο σταθμικός γεωμετρικός μέσος.

Λύση:

Για την εύρεση του σταθμικού γεωμετρικού μέσου χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$G = \sqrt[f_1]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \dots x_k^{f_k}}$$

$$\text{άρα } \log G = \frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \dots + f_k \log x_k}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i \log x_i}{\sum f_i}$$

Στη συνέχεια, για την διευκόλυνσή μας κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

Τάξεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητες f_i	$\log x_i$	$f_i \log x_i$
20-40	30	3	1,47712	4,43136
40-60	50	5	1,69897	8,49485
60-80	70	10	1,84510	18,45100
80-100	90	18	1,95424	35,17632
100-120	110	19	2,04139	38,78641
120-140	130	3	2,11394	6,34182
Σύνολο		58		111,68176

$$\text{Επομένως: } \log G = \frac{111,68176}{58} = 1,9255 \text{ και } G = 84,25.$$

Κυριότερες χρήσεις του γεωμετρικού μέσου είναι για τον υπολογισμό της μέσης ποσοστιαίας μεταβολής χρονολογικών σειρών και για την κατάρτιση των αριθμοδεικτών.

5.2.3. Αρμονικός μέσος

Όπως και με τους άλλους μέσους, έτσι και ο αρμονικός διακρίνεται σε αστάθμητο και σταθμικό.

α) Αστάθμητος αρμονικός μέσος

Ορισμός: Ο αστάθμητος αρμονικός μέσος μιας σειράς N παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_N$ δίνεται από τον τύπο:

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{x_i} \right)}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο αρμονικός μέσος των αριθμών 40 και 60. Στη συνέχεια να βρεθούν: ο αριθμητικός και ο γεωμετρικός τους μέσος.

Λύση:

Ξέρουμε ότι για τον αρμονικό έχουμε:

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_N}} = \frac{N}{\sum \left(\frac{1}{x_i} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \dots = 48.$$

$$\mu = \frac{40 + 60}{2} = 50 \text{ και}$$

$$G = \sqrt{40 \cdot 60} = 48,9897 \dots \approx 49$$

Παρατήρηση - Σχόλιο: Για παράδειγμα αν ένα αυτοκίνητο ταξιδεύει προς ένα μέρος με ταχύτητα 60km/h και επιστρέφει με ταχύτητα 40km/h τότε η μέση ταχύτητα δεν είναι 50km/h. Η μέση ταχύτητα θα ήταν 50km/h, αν το αυτοκίνητο είχε κινηθεί για μια ώρα με ταχύτητα 60km/h και στη συνέχεια για μια ώρα με ταχύτητα 40km/h.

Παράδειγμα - Ερμηνεία: Έστω ένα κινητό διένυσε μια απόσταση S με ταχύτητα v_1 και στην συνέχεια επέστρεψε διανύοντας την ίδια απόσταση S με ταχύτητα v_2 . Ποια η μέση ταχύτητα με την οποία κινήθηκε το κινητό σε όλη τη διαδρομή των $2S$;
Λύση:

Έστω η μέση ταχύτητα σε όλη τη διαδρομή ήταν v , τότε ισχύει:

$$v = \frac{2S}{t},$$

όπου t ο συνολικός χρόνος κίνησης. Άρα:

$$v = \frac{2S}{t} = \frac{2S}{t_1 + t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

όπου t_1 και t_2 οι δύο χρόνοι που χρειάστηκε το κινητό για να κινηθεί με την ταχύτητα v_1 και v_2 αντίστοιχα.

Δηλαδή $v = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$ η μέση ταχύτητα είναι ο αρμονικός μέσος των δύο ταχυτήτων v_1

και v_2 .

Εφαρμογή: Ένα κινητό κινήθηκε από την πόλη Α στην πόλη Β, όπου η απόσταση των πόλεων ήταν 400 km και στην συνέχεια επέστρεψε στην πόλη Α. Στην πόλη Β πήγε με ταχύτητα 50km/h και επέστρεψε στην πόλη Α με ταχύτητα 80km/h. Ποια η μέση ωριαία ταχύτητα μετάβασης και επιστροφής;

$$\text{Για τον αριθμητικό μέσο έχουμε: } \mu = \frac{50 + 80}{2} = \frac{130}{2} = 65,5 \text{ km/h}$$

Αυτό όμως δεν ισχύει, γιατί στη μετάβαση χρειάστηκε $\frac{400}{50} = 8 \text{ h}$ και στην επιστροφή

$\frac{400}{80} = 5 \text{ h}$, δηλαδή συνολικά χρειάστηκε $8 + 5 = 13 \text{ h}$ για να διανύσει απόσταση

$400 + 400 = 800 \text{ km}$. Άρα η μέση ταχύτητα είναι $\frac{800}{13} = 61,53 \text{ km/h}$ και όχι $65,5 \text{ km/h}$.

Αν γίνει η σωστή προσέγγιση στο πρόβλημα, δηλ υπολογιστεί ο αρμονικός μέσος τότε θα έχουμε:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{50} + \frac{1}{80}} = \frac{2}{0,0325} = 61,53 \text{ km/h} \text{ που είναι και η ζητούμενη ταχύτητα.}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι εφαρμογές του αρμονικού μέσου είναι περιορισμένες. Εφαρμόζονται σε προβλήματα υπολογισμού της ταχύτητας, του ρυθμού, σε λόγους δύο ποσοτήτων, στη μέτρηση της μεταβολής των τιμών, του πληθωρισμού κλπ. Παρατηρήστε ότι $H \leq G \leq \mu$

Παράδειγμα: Οδηγός αυτοκινήτου έχει να διατρέξει μια διαδρομή (π.χ. Αθήνα - Θεσσαλονίκη) και θέλει να εκτελέσει την όλη διαδρομή με μέση ταχύτητα 100 km/h. Μέχρι τη μέση της όλης διαδρομής η μέση ταχύτητά του λόγω αυξημένης κίνησης ήταν 80 km/h. Ποια πρέπει να είναι η μέση ταχύτητα αυτού, ώστε η όλη διαδρομή να είναι με μέση ταχύτητα 100 km/h;

Λύση:

Έστω v η μέση ταχύτητα κατά το δεύτερο μισό της διαδρομής, οπότε έχουμε:

$$H = \frac{N}{\sum \left(\frac{1}{x_i} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{v}} = 100 \Leftrightarrow 2 = 100 \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{v} \right) \Leftrightarrow \frac{2}{100} = \frac{1}{80} + \frac{1}{v} \Leftrightarrow \frac{2}{100} - \frac{1}{80} = \frac{1}{v} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{16}{800} - \frac{10}{800} = \frac{1}{v} \Leftrightarrow \frac{6}{800} = \frac{1}{v} \Leftrightarrow v = \frac{800}{6} = 133,333 \text{ km/h}$$

β) Σταθμικός αρμονικός μέσος

Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ της μεταβλητής δοθούν σε πίνακα συχνοτήτων με τις αντίστοιχες τους συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_k$, τότε ο σταθμικός αρμονικός μέσος θα προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$H = \frac{\sum f_i}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k}} = \frac{\sum f_i}{\sum \left(\frac{f_i}{x_i} \right)}$$

Παράδειγμα: Δίνεται η κατανομή του πίνακα:

Τάξεις	f_i
5-10	3
10-15	5
15-20	16
20-25	12
25-30	9
30-35	7
Σύνολο	52

Να υπολογιστεί ο αρμονικός μέσος.

Λύση:

Σχηματίζουμε τον πίνακα:

Τάξεις	f_i	x_i	$\frac{1}{x_i}$	$f_i \frac{1}{x_i}$
5-10	3	7,5	0,1333	0,3999
10-15	5	12,5	0,0800	0,4000
15-20	16	17,5	0,0571	0,9136
20-25	12	22,5	0,0444	0,5328
25-30	9	27,5	0,0364	0,3276
30-35	7	32,5	0,0308	0,2156
Σύνολο	52			2,7895

Επομένως θα έχουμε:

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \left(\frac{f_i}{x_i} \right)} = \frac{52}{2,7895} = 18,64$$

(Εκτός διδακτέας ύλης)

Κύρια χαρακτηριστικά των μέτρων κεντρικής τάσης

1. Αριθμητικού μέσου

- α) Επηρεάζεται από όλες τις τιμές της μεταβλητής και κυρίως από τις ακραίες (πολύ ψηλές ή πολύ χαμηλές).
- β) Είναι μια εξίσωση που επιδέχεται αλγεβρικούς χειρισμούς.
- γ) Βρίσκεται πάντα μεταξύ μικρότερης και μεγαλύτερης τιμής.

2. Γεωμετρικού μέσου

- α) Δεν επηρεάζεται τόσο πολύ από τις ακραίες τιμές όσο ο αριθμητικός μέσος
- β) Υπολογίζεται μόνο όταν όλα τα x_i είναι θετικά και διαφορετικά από το μηδέν (αυτό γιατί διαφορετικά δεν ορίζεται λογάριθμος).
- γ) Επιδέχεται αλγεβρικούς χειρισμούς.

3. Αρμονικού μέσου

- α) Χρησιμοποιείται για την λύση ορισμένων προβλημάτων (πχ υπολογισμός μέσης ωριαίας ταχύτητας ενός κινητού).
- β) Επιδέχεται αλγεβρικούς χειρισμούς.

Για την καλύτερη κατανόηση των μέτρων κεντρικής τάσης είναι σημαντικό να πούμε ότι όταν έχουμε μια καμπύλη συχνοτήτων συμμετρική (η περίπου συμμετρική τότε για την περιγραφή των δεδομένων προτιμάται ο μέσος αριθμητικός.

Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι ασυμμετρική τότε χρησιμοποιούμε τους λογαρίθμους των τιμών της X και μας δίνουν συμμετρική καμπύλη συχνοτήτων και τότε πια χρησιμοποιείται ο μέσος γεωμετρικός.

Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσουμε την **επικρατούσα τιμή**. Εκείνη δηλαδή την τιμή της μεταβλητής που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη συχνότητα. Αν η επικρατούσα τιμή βρίσκεται πιο κοντά στον αριθμητικό μέσο απ' ότι στο γεωμετρικό μέσο τότε προτιμάμε αυτόν, διαφορετικά χρησιμοποιούμε το γεωμετρικό μέσο.

(Τέλος εδαφίου εκτός διδακτέας ύλης)

5.3. Παράμετροι κεντρικής θέσης

5.3.1. Διάμεσος

Ορισμός: Αν οι τιμές μιας μεταβλητής τοποθετηθούν κατά αύξουσα τάξη μεγέθους, τότε η διάμεσος ονομάζεται η στατιστική εκείνη παράμετρος η οποία χωρίζει τις τιμές της μεταβλητής σε δύο ίσες ομάδες, δηλ. το 50% των τιμών της μεταβλητής είναι μικρότερο ή ίσο με την τιμή της διαμέσου και το άλλο μισό μεγαλύτερο ή ίσο με αυτή.

Η διάμεσος συμβολίζεται με το γράμμα M .

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον υπολογισμό της τιμής της.

α) Περίπτωση αταξινόμητων παρατηρήσεων

Στην περίπτωση αυτή το πλήθος των παρατηρήσεων δεν εμφανίζεται σε μορφή κατανομών συχνοτήτων και για τον υπολογισμό της διάμεσου διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

1. Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι αριθμός περιττός.

Τότε η διάμεσος είναι εκείνη η τιμή που βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο αφού προηγούμενος οι τιμές της μεταβλητής τοποθετηθούν κατά φυσική αύξουσα τάξη μεγέθους.

Παράδειγμα: εάν μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές:

5,2,3,16,13,7,11

τότε σε αύξουσα τάξη μεγέθους θα είναι:

2,3,5,7,11,13,16

Η διάμεσος καθορίζεται από τον αριθμό $\frac{N+1}{2}$, όπου N το πλήθος των παρατηρήσεων

(εν προκειμένου 7), άρα $\frac{7+1}{2} = 4$ δηλαδή ο τέταρτος όρος είναι η διάμεσος.

Επόμενος $M=7$

2. Όταν το πλήθος των τομών της μεταβλητής είναι αριθμός άρτιος

Τότε η διάμεσος ορίζεται ως ο αριθμητικός μέσος των τιμών των δύο κεντρικών όρων.

Παράδειγμα: Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Y είναι οι εξής: 6,8,12,10,19,15

άρα $\frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3,5$, δηλ. η διάμεσος θα είναι η τιμή που έχει τη θέση 3,5 επόμενος

η διάμεσος περιλαμβάνεται μεταξύ του τρίτου όρου και του τετάρτου της σειράς 6,8,10,12,15,19 (διατεταγμένη σε αύξουσα σειρά μεγέθους), άρα βρίσκεται μεταξύ του

10 και του 12, δηλ. $\frac{10+12}{2} = \frac{22}{2} = 11$.

Επομένως $M=11$

β) Περίπτωση ταξινομημένων δεδομένων

Και εδώ διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις.

1. Όταν η κατανομή είναι συνεχής.

(Υπενθύμιση: όταν η μεταβλητή παίρνει τιμές σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών τότε λέμε ότι είναι συνεχής όπως και την κατανομή της).

Για τον υπολογισμό της διαμέσου σχηματίζουμε την αθροιστική σειρά F των συχνοτήτων και διαιρούμε το σύνολο των παρατηρήσεων με το 2 δηλ. $N/2$ και βρίσκουμε έτσι το μέσο της συνολικής συχνότητας το οποίο αντιστοιχεί σε κάποια τάξη της κατανομής. Έστερα χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right)$$

όπου M είναι η διάμεσος που ζητούμε και

α_{i-1} - είναι το κατώτερο όριο της τάξης στην οποία εντοπίζουμε τη διάμεσο

f_i - είναι η συχνότητα της τάξης στην οποία εντοπίζουμε τη διάμεσο

F_{i-1} - είναι η αθροιστική συχνότητα της τάξης που προηγείται εκείνης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος

δ - είναι το πλάτος του διαστήματος τάξης στην οποία εντοπίζεται η διάμεσος και

N - είναι ο συνολικός αριθμός συχνοτήτων της κατανομής.

Παράδειγμα:

Στον πίνακα δίνεται η ταχύτητα 100 αυτοκινήτων με την οποία πέρασαν μια διασταύρωση

Τάξεις	f_i	F_i
30-40	5	5
40-50	12	17
50-60	19	36
60-70	30	66
70-80	17	83
80-90	10	93
90-100	7	100
Σύνολο	100	

Ζητείται να υπολογιστεί η διάμεση ταχύτητα.

Λύση:

1. Σχηματίζουμε την αθροιστική σειρά συχνοτήτων (F_i)

2. Προσδιορίζουμε την τιμή $N/2$ όπου N το σύνολο των συχνοτήτων δηλ. $100/2=50$

3. Η $N/2 = 50$ βρίσκεται ανάμεσα σε διαδοχικούς όρους της αθροιστικής σειράς F_i (στο παράδειγμά μας είναι ανάμεσα στο 36 και στο 66). Ο προηγούμενος όρος ο 36 είναι ο F_{i-1} .

4. Παρατηρούμε ότι ο επόμενος όρος το 66 ανήκε στο διάστημα 60-70 το κατώτερο όριο του οποίου το συμβολίζουμε με α_{i-1} , δηλ. $\alpha_{i-1} = 60$
5. Πηγαίνουμε στην τάξη από την οποία προσδιορίσαμε την τιμή α_{i-1} και παρατηρούμε πόσες συχνότητες έχει. Εδώ $f_i = 30$.
6. δ το πλάτος της τάξης στην οποία ανήκει το α_{i-1} άρα $\delta = 10$,
οπότε από τον τύπο έχουμε:

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 60 + \frac{10}{30} (50 - 36) = 60 + \frac{14}{3} = 64,6$$

2. Όταν η κατανομή συχνοτήτων είναι ασυνεχής.

Για τον υπολογισμό της διαμέσου όταν η κατανομή παρουσιάζει συχνότητες άλλα όχι τάξεις κάνουμε τις παρακάτω εργασίες:

1. Σχηματίζουμε την κατανομή συχνοτήτων F_i
2. Προσδιορίζουμε την τιμή $N/2$ όπου N το σύνολο των συχνοτήτων
3. Η τιμή $N/2$ περιέχεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς όρους της αθροιστικής σειράς F_i , δηλ. F_{i-1} και F_i ($F_{i-1} < N/2 < F_i$). Η τιμή της μεταβλητής που αντιστοιχεί στην τιμή F_i είναι η τιμή της διαμέσου, δηλαδή $M = x$.

Παράδειγμα: Ένα κείμενο υπαγορεύτηκε σε 100 μαθητές και ο αριθμός των ορθογραφικών σφαλμάτων δίνεται στον παρακάτω πίνακα

Αριθμός σφαλμάτων (x_i)	Αριθμός μαθητών (f_i)	Αθροιστική σειρά (F_i)
0	12	12
1	27	39
2	29	68
3	19	87
4	8	95
5	4	99
6	1	100
Σύνολο	100	

Ζητείται η διάμεσος

Λύση:

- α) σχηματίζουμε την αθροιστική σειρά F_i ,
- β) υπολογίζουμε την τιμή $N/2 = 100/2 = 50$ και
- γ) παρατηρούμε ότι η τιμή $F_i = 50$ βρίσκεται ανάμεσα στην 39 και 68 της αθροιστικής σειράς F_i . Ο μεγαλύτερος αριθμός (68) αντιστοιχεί στην τιμή της μεταβλητής $x = 2$ επομένως $M = 2$

Χαρακτηριστικά της διαμέσου

1. Η τιμή της δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές και για αυτό σε τέτοιες περιπτώσεις της ύπαρξης ακραίων τιμών προτιμάται από τον μέσο αριθμητικό.

2. Η διάμεσος μπορεί να υπολογιστεί και γραφικά.

5.4. Τεταρτημόρια

5.4.1. Πρώτο τεταρτημόριο

Ορισμός: Είναι η τιμή εκείνη της μεταβλητής κάτω από την οποία βρίσκεται το 25% του συνόλου των παρατηρήσεων και πάνω από αυτή το 75% των παρατηρήσεων. Συμβολίζεται με Q_1 .

Για τον υπολογισμό του τεταρτημορίου διακρίνουμε δύο τρόπους :

α) Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι σε μορφή κατανομής συχνοτήτων

Τότε η θέση του πρώτου τεταρτημορίου καθορίζεται από τον αριθμό $\frac{N+1}{4}$

Παράδειγμα: Αν η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές 4, 15, 6, 10, 12, 5, 20. Να ευρεθεί το πρώτο τεταρτημόριο.

Λύση:

Τοποθετούμε τις τιμές της μεταβλητής σε αύξουσα σειρά: 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 το πρώτο τεταρτημόριο θα είναι $\frac{N+1}{4} = \frac{7+1}{4} = 2^{\text{η}} \text{ θέση}$, δηλαδή $Q_1 = 5$

β) Όταν οι παρατηρήσεις είναι σε μορφή κατανομής συχνοτήτων

Τότε θα λύνεται με τον τύπο:

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right)$$

Παράδειγμα: Έστω τα ημερομίσθια των εργαζομένων μιας επιχείρησης κατανέμονται σύμφωνα με τον πίνακα:

τάξεις	f_i	F_i
100-110	30	30
110-120	80	110
120-130	120	230
130-140	150	380
140-150	75	455
150-160	65	520
Σύνολο	520	

Να υπολογιστεί το πρώτο τεταρτημόριο.

Λύση:

$$\frac{N}{4} = 130$$

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 120 + \frac{10}{120} \left(\frac{520}{4} - 110 \right) = 121,66$$

5.4.2 Τρίτο τεταρτημόριο

Ορισμός: Ονομάζεται η τιμή εκείνη της μεταβλητής κάτω από την οποία βρίσκεται το 75% του συνόλου των παρατηρήσεων και πάνω από αυτή το 25%. Συμβολίζεται με Q_3 .

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις όπως στη διάμεσο και το πρώτο τεταρτημόριο:

α) Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι σε μορφή κατανομής συχνοτήτων

Το τρίτο τεταρτημόριο δίνεται από τη σχέση:

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$$

β) Όταν οι παρατηρήσεις είναι σε μορφή κατανομής συχνοτήτων

Το τρίτο τεταρτημόριο δίνεται από τη σχέση:

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right)$$

Παράδειγμα: Δίνεται η κατανομή 100 ημερών σχετικά με τα αυτοκινητιστικά δυστυχήματα που έγιναν σε μια πόλη

Δυστυχήματα x_i	Μέρες f_i	Αθροιστική F_i
0	42	42
1	36	78
2	14	92
3	6	98
4	2	100
Σύνολο	100	

Ζητείται να υπολογιστεί το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο

Λύση:

α) Σχηματίζουμε την αθροιστική F_i

β) Προσδιορίζουμε την τιμή του πρώτου τεταρτημορίου: $\frac{N}{4} = \frac{100}{4} = 25$. Η τιμή αυτή περιέχεται μεταξύ των αθροιστικών συχνοτήτων 0 και 42, επομένως το $Q_1 = 0$.

Όμοια υπολογίζουμε και το Q_3 : $\frac{3N}{4} = \frac{3 \cdot 100}{4} = 75$. Ο αριθμός αυτός είναι μεταξύ των αθροιστικών συχνοτήτων 42 και 78, επομένως $Q_3 = 1$.

5.4.3. Γραφικός προσδιορισμός της διαμέσου και των τεταρτημορίων

Η διάμεσος και τα τεταρτημόρια μπορεί να υπολογιστούν χωρίς μεγάλο κόπο και γραφικά ως εξής:

(α) Σχηματίζουμε την αθροιστική σειρά των δεδομένων.

(β) Κατασκευάζουμε την αθροιστική καμπύλη, αφού στον οριζόντιο άξονα τοποθετήσουμε τα ανώτερα όρια των τάξεων και στον κάθετο τις τιμές της αθροιστικής σειράς (F_i).

(γ) Από τα σημεία $N/4$, $N/2$, και $3N/4$ του κατακόρυφου άξονα φέρουμε παραλλήλους προς τον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσουν την αθροιστική καμπύλη.

(δ) Από τα σημεία της τομής φέρουμε κάθετες γραμμές στον οριζόντιο άξονα. Τα σημεία τομής θα μας δώσουν τις τιμές M , Q_1 και Q_3 .

Παράδειγμα: Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των εισοδημάτων (σε χιλιάδες) 600 οικογενειών. Ζητείται: Να υπολογιστούν γραφικά και αριθμητικά η διάμεσος, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

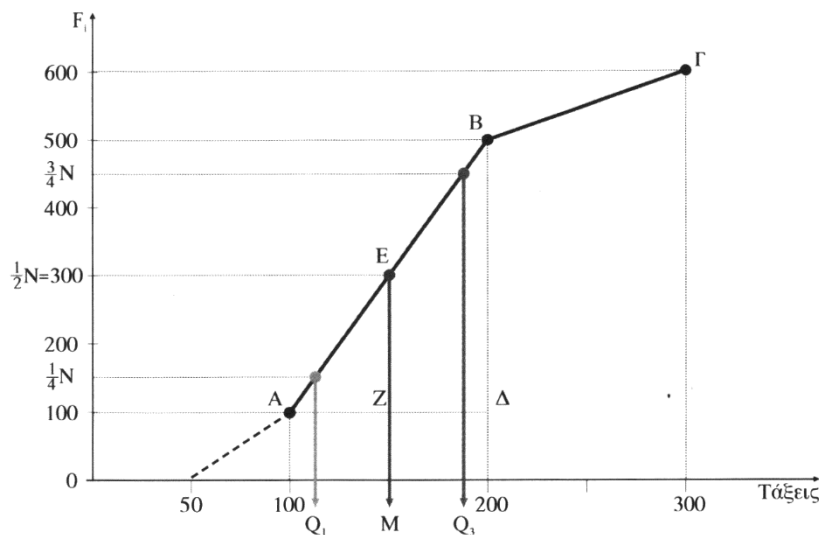
Πίνακας		
Τάξεις	f_i	F_i
50-100	110	110
100-200	400	510
200-300	90	600
Σύνολο	600	

Λύση:

Στην αρχή υπολογίζουμε τη θροιστική σειρά και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διάμεσο και τα τεταρτημόρια γραφικά όπως παρακάτω.

α) Γραφικός υπολογισμός της διαμέσου και των τεταρτημορίων

Σχηματίζουμε πρώτα το αθροιστικό διάγραμμα στο σύστημα των ορθογωνίων συντεταγμένων και μετά προσδιορίζουμε τη διάμεσο και τα τεταρτημόρια γραφικά, όπως φαίνεται στο διάγραμμα:



β) Αριθμητικός υπολογισμός της διαμέσου και των τεταρτημορίων

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{2} - F_{i-1} \right) = 100 + \frac{100}{400} (300 - 110) = 100 + \frac{1}{4} \cdot 190 = 147,5$$

$$Q_1 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{N}{4} - F_{i-1} \right) = 100 + \frac{100}{400} (150 - 110) = 110$$

$$Q_3 = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i} \left(\frac{3N}{4} - F_{i-1} \right) = 100 + \frac{100}{400} (450 - 110) = 185$$

5.5. Επικρατούσα τιμή

Ορισμός: Επικρατούσα τιμή ονομάζεται εκείνη η τιμή της μεταβλητής που παρουσιάζει την μεγαλύτερη συχνότητα και συμβολίζεται με M_0 .

Παράδειγμα: Αν υποθέσουμε ότι σε μια επιχείρηση 100 υπάλληλοι παίρνουν μισθό 1.500 €, 200 υπάλληλοι παίρνουν 1.200 €, 100 υπάλληλοι παίρνουν 900 €, 50 υπάλληλοι παίρνουν 750 €. Τότε η επικρατούσα τιμή είναι 1.200 €, δηλ ο μισθός που παίρνουν οι περισσότεροι υπάλληλοι.

Επίσης στις παρατηρήσεις 6, 3, 9, 16, 10 δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή επειδή κάθε τιμή εμφανίζεται μόνο μια φορά.

Τέλος οι παρατηρήσεις 10, 11, 11, 8, 8, 11, 8, 12, έχουν δύο επικρατούσες τιμές $M_0 = 11$ και $M_0 = 8$.

Αν η κατανομή έχει μόνο μια επικρατούσα τιμή ονομάζεται *μονοκόρυφη*, ενώ αν έχει δύο επικρατούσες τιμές λέγεται *δικορύφη*.

Στην περίπτωση κατανομής συχνοτήτων σε μορφή τάξεων, η επικρατούσα τιμή υπολογίζεται από τον τύπο

$$M_0 = a_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1}$$

όπου: a_{i-1} το κατώτερο όριο της τάξης στην οποία ανήκει ο μεγαλύτερος αριθμός συχνοτήτων,

δ το πλάτος της τάξης

Δ_1 η διαφορά μεταξύ της μέγιστης συχνότητας και της προηγούμενης

Δ_2 η διαφορά μεταξύ της μέγιστης συχνότητας και της επόμενης.

Παράδειγμα: Δίνεται η κατανομή ημερομισθίων 100 υπαλλήλων μιας επιχείρησης.

Ημερομίσθια (€)	Συχνότητες (f_i)
30-40	5
40-50	12
50-60	19
60-70	30
70-80	17
80-90	10
90-100	7
Σύνολο	100

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη συχνότητα (30) αντιστοιχεί στην τάξη 60-70. Επομένως μπορούμε να θέσουμε

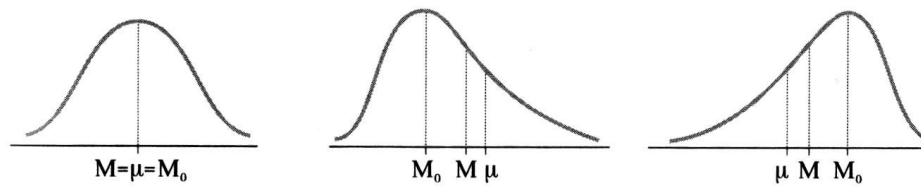
$\delta = 10$, $a_{i-1} = 60$, $\Delta_1 = 11$, $\Delta_2 = 13$.

Οπότε: $M_0 = a_{i-1} + \frac{\Delta_1 \cdot \delta}{\Delta_2 + \Delta_1} = 60 + 10 \frac{11}{11+13} = 64,58 \text{ €}$,

που σημαίνει ότι ανάμεσα στους εργατές που εργάζονται στην επιχείρηση αυτή οι περισσότεροι παίρνουν το ημερομίσθιο των 64,58 €.

Σύγκριση αριθμητικού μέσου, διαμέσου και επικρατούσας τιμής

- Στην περίπτωση που μια κατανομή είναι συμμετρική, οι τιμές των τριών παραπάνω παραμέτρων συμπίπτουν μεταξύ τους.
- Στις ασυμμετρικές κατανομές οι παραπάνω παράμετροι διαφέρουν μεταξύ τους και η διάμεσος βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων παραμέτρων.
- Η χρησιμοποίηση της διαμέσου είναι μεγάλη όταν η σειρά των παρατηρήσεων είναι ανοικτή, γιατί τότε κανένα άλλο μέσο, πλην της διαμέσου και της επικρατούσας τιμής, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.
- Στις περιπτώσεις μεγάλης ασυμμετρίας των κατανομών, ο αριθμητικός μέσος δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτική παράμετρος της δοθείσας κατανομής, ενώ η διάμεσος δεν επηρεάζεται από τις τυχόν μεγάλες ή μικρές ακραίες τιμές.



Διάγραμμα συμμετρικής και ασύμμετρων κατανομών

Ασκήσεις 5^ο Κεφαλαίου

1. Το παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζει την κατανομή των οικογενειών ενός χωριού σε σχέση με τον αριθμό των παιδιών τους.



Είναι σωστό να πούμε ότι ο μέσος αριθμός παιδιών ανά οικογένεια είναι 3; Αληθεύει ότι οι μισές τουλάχιστον οικογένειες έχουν 2 ή λιγότερα παιδιά και ότι το 25% των οικογενειών έχει τουλάχιστον 3 παιδιά;

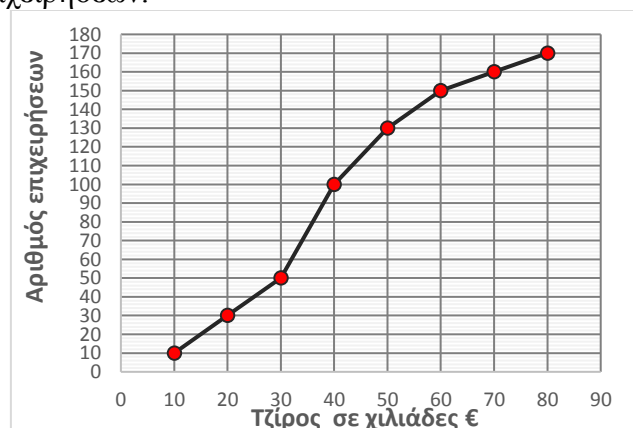
2. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η κατανομή των μηνιαίων εσόδων από εξαγωγές 36 εταιριών.

Μηνιαία έσοδα από εξαγωγές (σε χιλ. €)	Αριθμός εταιριών
15 – 25	4
25 – 35	6
35 – 45	12
45 – 55	7
55 – 65	5
65 – 75	2
Σύνολο	36

α) Είναι σωστό ότι τα μέσα μηνιαία έσοδα των εταιριών είναι 6 χιλιάδες €; Αν ναι γιατί, αν όχι πόσα είναι;

β) Είναι αλήθεια ότι το 25% των επιχειρήσεων έχουν μηνιαία έσοδα πάνω από 55 χιλιάδες €;

3. Το παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζει τον ετήσιο τζίρο (σε χιλιάδες €) 170 μικρομεσαίων επιχειρήσεων.



Να σχεδιαστεί το διάγραμμα κατανομής συχνοτήτων των επιχειρήσεων σε σχέση με τον ετήσιο τζίρο τους. Να βρεθεί ο μέσος ετήσιος τζίρος όλων των επιχειρήσεων.

4. Οι παρακάτω πίνακες δίνουν την κατανομή του μέσου ακαθάριστου κατά κεφαλή εισοδήματος (σε δολάρια) σε δύο χώρες.

Χώρα Α		Χώρα Β	
Κατά κεφαλή εισόδημα (δολάρια)	Ποσοστό κατοίκων	Κατά κεφαλή εισόδημα (δολάρια)	Ποσοστό κατοίκων
500-1.500	9	500-1.500	1
1.500-2.500	11	1.500-2.500	4
2.500-3.500	12	2.500-3.500	22
3.500-4.500	16	3.500-4.500	48
4.500-5.500	20	4.500-5.500	3
5.500-6.500	13	5.500-6.500	4
6.500-7.500	10	6.500-7.500	5
7.500-8.500	6	7.500-8.500	4
8.500-9.500	3	8.500-9.500	9

Ποιο είναι το μέσο κατά κεφαλή εισόδημα στις δύο χώρες; Είναι σωστό ότι το 50% των κατοίκων της Α χώρας κερδίζει περισσότερα από το 75% των κατοίκων της Β χώρας; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

5. Ένας σπουδαστής σ' ένα σύνολο 7 μαθημάτων που εξετάστηκε έχει μέση βαθμολογία 6,5 και διάμεσο βαθμολογία 4. Ένας άλλος έχει διάμεσο βαθμολογία 6,5 και μέση βαθμολογία 4.

α) Ποιος από τους δύο φοιτητές έχει στα περισσότερα μαθήματα βαθμολογία ίση ή μεγαλύτερη από 5; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

β) Δώστε από ένα παράδειγμα 7 βαθμών (μεταξύ 0 και 10) για κάθε φοιτητή που να έχουν τιμές για το μέσο αριθμητικό και τη διάμεσο ίδιες με τις προαναφερόμενες.

6. Δίνεται η παρακάτω κατανομή συχνοτήτων :

Τάξεις τιμών μεταβλητής	Συχνότητες
5-15	5
15-25	10
25-35	20
35-45	10
45-55	5

α) Να βρεθεί μια άλλη κατανομή συχνοτήτων με τις ίδιες συχνότητες αλλά με διπλάσιο μέσο αριθμητικό.

β) Να υπολογιστούν οι μέσοι αριθμητικοί της δοσμένης και της νέας κατανομής.

γ) Να γίνουν τα πολύγωνα συχνοτήτων των δύο κατανομών.

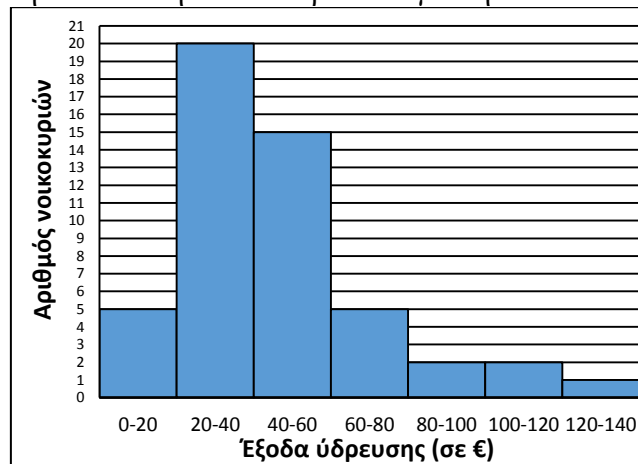
7. Σύνολο 250 μισθωτών έχει μέσο μισθό 1.560 €. Οι 100 από τους 250 μισθωτούς έχουν μέσο μισθό 1.500 €. Να βρεθεί ο μέσος μισθός των υπόλοιπων 150 μισθωτών.

8. Δίνεται η παρακάτω κατανομή μισθωτών:

Τάξεις μισθών (χιλ. δρχ.)	Αριθμός μισθωτών
150 – 250	15
250 – 350	25
350 – 450	35
450 – 550	20
550 – 650	8
650 – 750	4
750 – 850	3

- α) Να γίνει το διάγραμμα των δεξιόστροφων αθροιστικών συχνοτήτων.
β) Να υπολογιστεί ο μέσος μισθός.
γ) Να υπολογιστεί το πρώτο τεταρτημόριο και να εξηγηθεί η σημασία του.
9. Τα βάρη (σε κιλά) των μελών μιας ομάδας αθλητών είναι τα ακόλουθα:
74, 52, 67, 68, 71, 76, 86, 81, 73, 68, 64, 75, 71, 57, 67,
57, 59, 72, 79, 64, 70, 74, 77, 79, 65, 68, 76, 83, 61, 63
α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων των βαρών. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί (αλλά δεν είναι υποχρεωτικό) εύρος διαστήματος 5 κιλών.
β) Να υπολογιστεί το μέσο και το διάμεσο βάρος των αθλητών.
10. Ο μέσος αριθμητικός n αριθμών ισούται με 5. Αν προσθέσουμε τον αριθμό 13 στους προηγούμενους αριθμούς (το πλήθος των αριθμών θα γίνει $n+1$) ο νέος μέσος αριθμητικός ισούται με 6. Να βρεθεί το πλήθος n των αριθμών.
11. Από τα αρχεία του Δ.Ι.Ε.Κ. επελέγη ένα δείγμα 30 σπουδαστών των οποίων οι βαθμοί (με ακρίβεια προσέγγισης δεκάτου) είναι οι εξής:
6,6 6,0 6,0 6,1 6,1 6,1 6,1 6,1 5,9 6,5 6,1 6,2 6,2 6,3 6,4
6,4 6,4 6,6 6,6 6,8 6,8 6,8 6,9 6,8 7,0 7,9 7,5 7,6 7,6 6,6
α) Να παρουσιαστούν τα δεδομένα με μορφή γραφικής παράστασης.
β) Να υπολογιστεί ο μέσος βαθμός πτυχίου.
γ) Να υπολογιστεί το τρίτο τεταρτημόριο και να εξηγηθεί η σημασία του.
12. Οι αριθμοί 4, 6, 12, 4, 10, 12, 3, x , y έχουν μέσο αριθμητικό 7 και επικρατούσα τιμή 4. Να βρεθούν:
α) Οι τιμές των αριθμών x και y .
β) Η διάμεσος του συνόλου των 9 αριθμών.
13. Στον παρακάτω πίνακα απεικονίζονται οι βαθμολογίες 100 υποψηφίων σ' ένα διαγωνισμό:
- | Βαθμοί | Αριθμός υποψηφίων |
|---------|-------------------|
| 0 – 2 | 4 |
| 2 – 4 | 6 |
| 4 – 6 | 8 |
| 6 – 8 | 14 |
| 8 – 10 | 17 |
| 10 – 12 | - |
| 12 – 14 | 11 |
| 14 – 16 | - |
| 16 – 18 | 8 |
| 18 – 20 | 2 |
- Κατά την καταγραφή των βαθμολογιών χάθηκαν κάποια στοιχεία που αφορούν τους βαθμούς. Γνωρίζοντας ότι η μέση βαθμολογία των υποψηφίων στον διαγωνισμό είναι 10 και ότι εισήχθηκε το 50% των υποψηφίων να βρεθεί ποιος ήταν ο βαθμός του τελευταίου εισακτέου.
14. Οι μηνιαίες αποδοχές 100 υπαλλήλων μιας εταιρίας κυμαίνονται μεταξύ 200.000 και 400.000 δρχ. 10 υπάλληλοι αμείβονται με 240.000 δρχ. και κάτω, 30 υπάλληλοι αμείβονται με 280.000 δρχ. και κάτω, 40 υπάλληλοι αμείβονται με περισσότερο από 340.000 δρχ., ενώ 10 υπάλληλοι αμείβονται με περισσότερο από 360.000 δρχ.
α) Να υπολογιστεί ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπαλλήλων.
β) Να κατασκευαστεί το πολύγωνο συχνοτήτων.

15. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η κατανομή των νοικοκυριών μιας πόλης σε σχέση με την ετήσια δαπάνη που καταβάλουν για την κατανάλωση νερού.



- α) Να κατασκευαστεί το διαγράμματα των αθροιστικών κατανομών συχνοτήτων.
β) Να υπολογιστεί η μέση ετήσια δαπάνη του συνόλου των νοικοκυριών.
γ) Ο Δήμαρχος σκέπτεται να επιβάλει σε κάθε νοικοκυριό ένα τέλος που θα ανέρχεται στο 2% της αξίας της κατανάλωσης του. Αν επιβληθεί αυτό το τέλος πόση θα είναι η μέση ετήσια δαπάνη του συνόλου των νοικοκυριών και πόσο ακριβώς θα είναι το ποσό κάτω του οποίου θα πληρώνει το 75% των νοικοκυριών.

16. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει κάποια δημογραφικά στοιχεία ενός δήμου:

Αριθμός οικογενειών	Αριθμός παιδιών	με μέση ηλικία (έτη)
8	0	0
25	1	8
120	2	12
30	3	10
20	4	16
12	5	15
5	6	13
7	7	14

- α) Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός παιδιών ανά οικογένεια και η μέση ηλικία των παιδιών.
β) Να υπολογιστεί η διάμεσος του αριθμού των παιδιών και η διάμεσος της ηλικίας των παιδιών.
γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της κατανομής των οικογενειών σε σχέση με τον αριθμό των παιδιών.

17. Ο μικρότερος μηνιαίος μισθός μεταξύ των μισθών 20 υπαλλήλων ενός δήμου είναι 500€, ενώ ο μεγαλύτερος 700€. Το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο των μισθών αυτών είναι 540€ και 620€, αντίστοιχα.

- α) Η κατανομή των μισθών των υπαλλήλων είναι συμμετρική ή παρουσιάζει ασυμμετρία; Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
β) Αν γνωρίζετε ότι η διάμεσος των μισθών των 20 υπαλλήλων είναι 560€, να δώσετε ένα παράδειγμα 20 μισθών για τους υπαλλήλους.

18. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή 100 ενηλίκων ανδρών ως προς το βάρος σε κιλά και ως προς το ύψος σε εκατοστά.

Βάρος Υψος	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)
[150,160)	3	10	1	0
[160,170)	5		12	4
[170,180)	2	8	16	5
[180,190)	0	4	7	10

- α) Οι άνδρες παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς το βάρος ή ως προς το ύψος τους;
β) Να γίνουν γραφικές παραστάσεις της κατανομής των ανδρών ως προς το βάρος και το ύψος τους.

19. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει δεδομένα σχετικά με τον αριθμό των μελών και την μέση ηλικία τους σε 50 νοικοκυριά μιας κοινότητας.

Αριθμός μελών	3	3	2	2	4	1	4	5	2	5
Μέση ηλικία (έτη)	25	30	48	33	47	32	24	35	28	38
Αριθμός μελών	4	5	6	6	3	5	3	4	7	4
Μέση ηλικία (έτη)	40	45	39	38	22	39	31	40	31	19
Αριθμός μελών	3	6	5	3	7	2	4	3	2	4
Μέση ηλικία (έτη)	19	32	27	15	24	30	25	14	18	36
Αριθμός μελών	7	7	1	4	2	6	5	7	2	6
Μέση ηλικία (έτη)	35	24	17	24	70	54	43	27	45	25
Αριθμός μελών	2	5	7	6	4	1	4	7	4	2
Μέση ηλικία (έτη)	57	34	27	34	22	26	54	41	25	58

- α) Να τεθούν τα παραπάνω δεδομένα σε μορφή ταξινομημένων δεδομένων πίνακα διπλής εισόδου και να γίνει το πολύγωνο συχνοτήτων που να παρουσιάζει την κατανομή των 50 νοικοκυριών σε σχέση με την μέση ηλικία των μελών τους.
β) Να υπολογιστεί η μέση ηλικία όλων των μελών της κοινότητας.

20. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την κατανομή των νοικοκυριών ενός δήμου σε σχέση με το εμβαδόν της κατοικίας τους και τον αριθμό των ατόμων που τα αποτελούν

Εμβαδόν Κατοικίας (ΕΚ) σε m^2	Αριθμός ατόμων ανά νοικοκυριό					
	1	2	3	4	5	6
$20 \leq EK < 40$	110	25	5	2	1	2
$40 \leq EK < 60$	150	100	25	10	3	2
$60 \leq EK < 80$	120	190	11	60	15	6
$80 \leq EK < 100$	65	140	120	120	50	35
$100 \leq EK < 120$	25	65	65	80	45	40
$120 \leq EK < 140$	15	35	30	40	30	30
$140 \leq EK \leq 160$	8	5	4	6	5	19

- α) Να κατασκευαστεί το πολύγωνο συχνοτήτων των νοικοκυριών ως προς το εμβαδόν της κατοικίας τους.
β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της κατοικίας πάνω από το οποίο κατοικούν τα $\frac{3}{4}$ των νοικοκυριών.

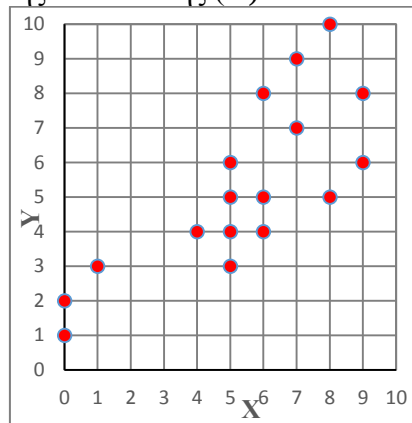
21. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η κατανομή των νοικοκυριών ενός δήμου σε σχέση με το εμβαδόν (σε m^2) της κατοικίας τους και των αριθμό των μελών τους.

Εμβαδόν Αρ. μελών	[0,20)	[20,40)	[40,60)	[60,80)	[80,100)	[100,120)	[120,140)
1	12	15	11	10	3	1	0
2	2	14	26	40	15	4	2
3	1	10	14	18	50	15	12
4	1	3	8	10	55	20	13
5	1	2	5	14	60	50	18
6	0	3	6	11	55	70	25
7	3	2	4	4	70	80	13
8	0	1	1	3	42	23	20

α) Να γίνει το διάγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων των νοικοκυριών που έχουν από 4 έως 6 μέλη ως προς το εμβαδόν της κατοικίας τους και μία γραφική παράσταση που να παρουσιάζει την κατανομή των νοικοκυριών ως προς τον αριθμό μελών της οικογενείας τους.

β) Χωρίς να γίνει κανένας υπολογισμός (πράξη) να απαντήσετε στο ερώτημα: το μέσο εμβαδόν (μέσος αριθμητικός εμβαδού) όλων των κατοικιών είναι μικρότερο από το εμβαδόν των κατοικιών των μισών τουλάχιστον νοικοκυριών; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας)

22. Το παρακάτω γράφημα παρουσιάζει τους βαθμοί 20 σπουδαστές στα μαθήματα των μαθηματικών (X) και της στατιστικής (Y)



α) Να κατασκευαστεί πίνακας συχνοτήτων που να παρουσιάζει την κατανομή των φοιτητών και ως προς τα δύο μαθήματα ταυτόχρονα.

β) Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή των βαθμών στο μάθημα των μαθηματικών και να γίνει γράφημα που να παρουσιάζει την κατανομή των φοιτητών ως προς το βαθμό τους στο μάθημα της στατιστικής.